Master de Mécanique-Physique M1

Université Paris Sud

Bât 507 – 91405 Orsay

Méthodes expérimentales en mécanique des fluides

(16 septembre 2004)

F. Moisy

Table des matières

Introduction

Ces notes de cours ont pour objectif de présenter brièvement les principales méthodes de mesure de vitesse locale utilisées en mécanique des fluides : anémométrie à fil chaud, anémométrie Laser Doppler et vélocimétrie par image de particules (les méthodes de mesure de débit ne sont pas abordées ici). Pour chacune de ces méthode, l'accent est mis successivement sur le principe physique de la mesure, puis sur les aspects expérimentaux, en s'efforçant de les illustrer par des exemples pratiques d'utilisation.

Il n'existe pas de bonne ou de mauvaise méthode pour mesurer la vitesse d'un fluide ; tout dépend de ce que l'on souhaite mesurer et avec quelle précision. Le coût est évidemment un paramètre important dans le choix de telle ou telle technique de mesure. Les principaux critères de choix sont les suivants :

1. Si l'on veut se contenter de profils de vitesse moyens sur des échelles spatiales pas trop faibles (supérieures au mm), le tube de Pitot est un moyen de mesure pratique et de faible coût. Son principal inconvénient est son caractère fortement intrusif.
2. Si les fluctuations temporelles de la vitesse doivent aussi être mesurées (dans le cas d'écoulements turbulents), les techniques d'anémométrie à fil chaud ou à Laser Doppler doivent être envisagées. De résolution spatiale et temporelle à peu près comparable, la seconde méthode présente l'avantage d'être non intrusive, mais nécessite un accès optique à l'écoulement étudié.
3. Si enfin l'on souhaite disposer d'une mesure instantannée du champ de vitesse spatial, c'est la technique de vélocimétrie par images de particules qui doit être préférée. Elle est non intrusive, mais de résolutions spatiale et temporelle inférieures aux techniques d'anémométrie à fil chaud et de Laser Doppler.

Le tableau 1 résume ces différents critères ainsi que le principe de base de chaque méthode de mesure, détaillé dans les chapitres qui suivent.

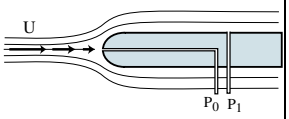
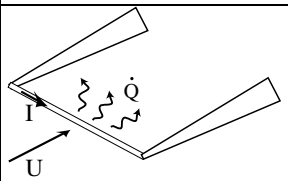
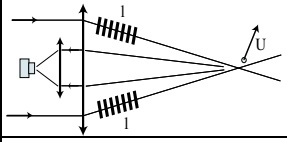
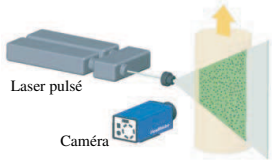
	TUBE DE PITOT	ANEMOMETRE A FIL CHAUD (HOT WIRE ANEMOMETRY)	ANEMOMETRE LASER DOPPLER (LASER DOPPLER VELOCIMETRY, LDV)	VELOCIMETRIE PAR IMAGES DE PARTICULES (PIV)
Schéma				
Principe	Mesure de 2 pressions (statique et dynamique) + Bernouilli $U = \sqrt{2(P_d - P_s)/\rho}$	Mesure de la puissance RI^2 dissipée par un fil chauffé.	Mesure (par interférométrie) du décalage Doppler sur particule diffusante.	Mesure du déplacement de particules entre deux images (méthode de corrélations)
Avantages	Mise en oeuvre très simple, bon marché (~ 1 k€) Idéal pour profils de vitesse moyenne	Excellente résolution spatiale et temporelle (idéal pour mesures de fluctuations turbulentes). Mise en oeuvre assez simple, coût modéré (~ 10 - 20 k€).	Non intrusif. Calibration linéaire. Très bonne résolution spatiale et temporelle (idéal pour mesures de fluctuations turbulentes). Possibilité mesure plusieurs composantes.	Non intrusif. Champ 2D instantané.
Inconvénients	Très intrusif. Résolution spatiale & temporelle faible.	Intrusif. Fragile Calibration non linÈaire Contaminations (fluct° température)	Accès optique (fluide transparent). Nécessite ensemencement. R§glages délicats. Cher (50-100 k€)	Accès optique (fluide transparent). Nécessite ensemencement. Mauvaise résolution temporelle. Cher (70 - 100 k€)

FIG. 1 – Tableau comparatif des différentes méthodes de mesure de vitesse.

Chapitre 1

L'anémométrie à fil chaud

1.1 Principe de base de l'anémométrie à fil chaud

1.1.1 Introduction

Le principe de l'anémométrie à fil chaud est celui du "*wind chill*" (littéralement le *froid du vent*), indication subjective de la température que donnent les bulletins météo américains : la température ressentie est la puissance dissipée par le corps (c'est-à-dire transférée du corps vers l'extérieur). Le vent, en favorisant ce transfert de chaleur, donne ainsi l'impression d'une température plus basse que la température réelle.

Afin de mesurer la vitesse dans un fluide, on peut ainsi mesurer la puissance transférée depuis un fil fin chauffé par effet Joule et refroidi par le passage du fluide. La puissance emportée par le fluide donne donc une mesure indirecte de la vitesse de l'écoulement – mais pas de sa direction.

L'anémométrie à fil chaud est une technique de mesure en un point fixe, faiblement intrusive, de mise en œuvre relativement légère et assez bon marché. Son point fort est son excellente résolution spatiale et temporelle, qui en font la technique de choix pour l'étude des fluctuations turbulentes.

Les anémomètres à fils chauds usuels sont constitués d'un fin fil d'environ 1 mm de long, de 1 à 10 μm de diamètre, tendu entre deux broches. Les mesures sont effectuées le plus souvent dans l'air (pour des vitesses de 0,1 m/s à plusieurs centaines de m/s), mais aussi dans l'eau et plus généralement dans tous les fluides. Divers compromis entre résistivité, conductivité thermique et robustesse mécanique conduisent à privilégier pour le fil des matériaux comme le tungstène, le platine ou certains alliages.

1.1.2 Bilan de puissance

On considère un fil de longueur l et de diamètre d (fig. 1.1), tel que le rapport d'aspect l/d soit très grand (typiquement $l/d \simeq 200$). On fait circuler dans ce fil de résistance R_w (w pour *wire*) un courant d'intensité I. En notant E l'énergie stockée sous forme de chaleur dans le fil, on peut écrire le bilan de puissance :

$$\frac{dE}{dt} = \dot{W} - \dot{Q}, \tag{1.1}$$

où $\dot{W} = R_w I^2 > 0$ est la puissance apportée par effet Joule et $\dot{Q} > 0$ la chaleur transférée depuis le fil vers l'extérieur (fig. 1.2). Le fil sera ainsi porté à une température T_w, supérieure

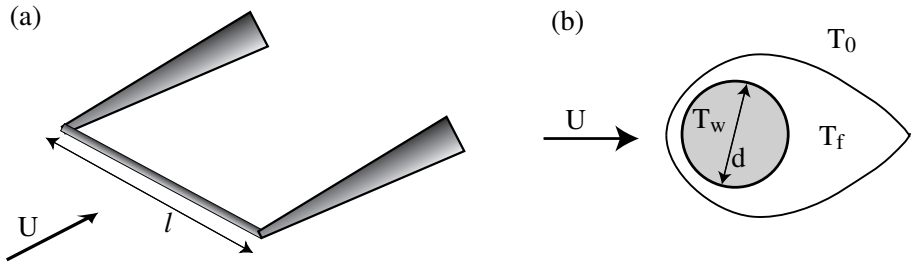


FIG. 1.1 – (a) : Fil monté sur ses broches, perpendiculaire à la vitesse. (b) : Allure de la couche limite thermique autour du fil ; $T_f = (T_w + T_0)/2$ est la température du film fluide chaud.

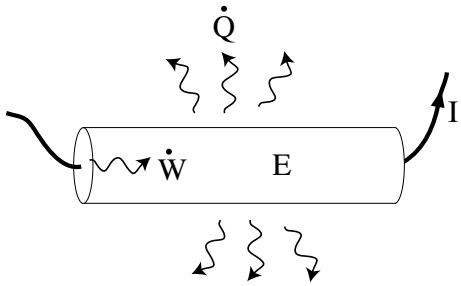


FIG. 1.2 – Bilan de puissance sur le fil chaud.

(d'environ 100°C) à la température du fluide environnant T_0 (supposée constante).

Plusieurs effets contribuent à la dissipation de cette chaleur :

- **Conduction vers le fluide**, due à la diffusion moléculaire de la chaleur dans le fluide.
- **Convection vers le fluide**, où la chaleur est transportée par le mouvement du fluide environnant[1].
- **Conduction vers les supports**, due à la diffusion de la chaleur le long du fil, $\sim k_w(T_w - T_0)$, où k_w est la conductivité thermique du fil.
- **Rayonnement thermique** : puissance transférée sous forme de rayonnement électromagnétique (c'est le principe de fonctionnement d'une ampoule électrique), qui peut s'écrire $\sim \sigma\mathcal{A}(T_w^4 - T_0^4)$, où $\sigma = 5,7\ 10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4} est la constante de Stefan.

Nous négligerons dans un premier temps la conduction vers les supports, en prenant un rapport d'aspect $l/d \gg 1$. Nous admettrons également dans toute la suite que la puissance rayonnée est négligeable.

Reste à modéliser les 2 premiers effets : conduction et convection vers le fluide. La puissance dissipée par le fil est le flux de chaleur $\vec{j}_Q = -k_f\vec{\nabla}T$ (loi de Fourier) intégré sur la surface $\mathcal{A} = \pi dl$ du fil, où k_f est la conductivité thermique du fluide environnant. Cette conductivité thermique pouvant dépendre elle-même de la température, on la choisi par convention à la "température du film[2]" (fig. 1.1b) T_f, définie par convention comme la moyenne

$$T_f = (T_w + T_0)/2.$$

[1] Il s'agit bien entendu ici de *convection forcée* : la chaleur est transportée par l'écoulement sans rétroagir sur celui-ci. Nous verrons au paragraphe 1.4.2 les problèmes liés à la *convection naturelle*.

[2] A ne pas confondre avec l'*anémométrie à film chaud*, qui est un autre dispositif – voir le paragraphe 1.4.4.

Cette puissance ne devra dépendre après intégration que de la différence caractéristique de température, $T_w - T_0$. En introduisant le coefficient de transfert h (en W.m^{-2}.K^{-1}), on peut écrire cette puissance par unité de surface

$$\frac{\dot{Q}}{\mathcal{A}} = h(T_w - T_0). \tag{1.2}$$

h représente la puissance par unité de surface transférée pour une différence de température donnée. On adimensionne ce coefficient de transfert en introduisant le nombre de Nusselt Nu :

$$\mathrm{Nu} = hd/k_f$$

(où on a utilisé d et non l comme longueur caractéristique, car dans la limite $l/d \gg 1$ le problème est bidimensionnel et l ne doit plus intervenir). En remplaçant les expressions de Nu et $\mathcal{A}$ dans (1.2), on obtient finalement :

$$\dot{Q} = \pi l k_f (T_w - T_0)\mathrm{Nu}. \tag{1.3}$$

Le nombre de Nusselt exprime l'efficacité du transfert par convection, c'est-à-dire le rapport entre puissance transférée totale et puissance transférée par conduction uniquement. Nu est d'autant plus élevé que la vitesse du fluide U est élevée. Par construction, on a $\mathrm{Nu} > \mathrm{Nu}_0$ en présence de convection, et $\mathrm{Nu} = \mathrm{Nu}_0 \simeq 1$ ($h \simeq k_f/d$) pour $U = 0$ (conduction pure).

Le bilan de puissance (1.1) s'écrit ainsi

$$\frac{dE}{dt} = R_w I^2 - \pi l k (T_w - T_0)\mathrm{Nu}. \tag{1.4}$$

L'énergie E stockée dans le fil peut s'écrire en fonction de la température T_w du fil :

$$dE = mc\, dT_w,$$

où m est la masse du fil et c sa capacité calorifique. La température du fil peut varier, cependant nous supposerons dans la suite T_w comme indépendant du temps, soit $dE/dt = 0$. Cette hypothèse sera discutée plus en détail au paragraphe 1.3.5. Notre bilan de puissance devient alors

$$R_w I^2 = \pi l k_f (T_w - T_0)\mathrm{Nu}. \tag{1.5}$$

Remarquons à ce point que nous n'avons pas beaucoup avancé : toute la difficulté du problème, c'est-à-dire la dépendance en la vitesse U, se trouve "cachée" dans le nombre de Nusselt, qui décrit toute la physique du système.

Calculons l'ordre de grandeur de chacun des termes de l'équation (1.5). En fonctionnement usuel dans l'air, on a $R_w \simeq 100\ \Omega$, $I \simeq 0,05$ A, soit une tension aux bornes du fil de $R_w I \simeq 5$ V et une puissance dissipée $R_w I^2 \simeq 0,25$ W. Avec $l \simeq 1$ mm, $k_f = 0,02$ W.K^{-1}.m^{-1} (air à température ambiante) et $T_w - T_0 \simeq 200^o$C, on obtient $\mathrm{Nu} \simeq 10$: le transfert par convection est environ 10 fois plus efficace que par conduction pure.

1.2 Relation fondamentale de l'anémométrie : la Loi de King

1.2.1 Transfert de chaleur : la loi Nu $= f$(Re)

Tout le problème de l'anémométrie à fil chaud est maintenant de déterminer la loi de transfert de chaleur Nu en fonction de la vitesse U, c'est-à-dire du nombre de Reynolds Re_w

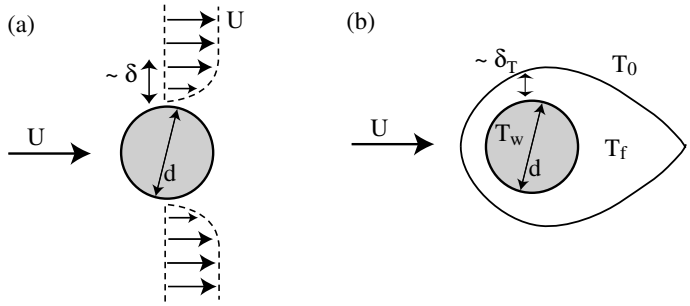


FIG. 1.3 – (a) : Couche limite de vitesse, (b) : couche limite thermique.

basé sur le fil :

$$\mathrm{Re}_w = \frac{Ud}{\nu_f},$$

où, faute de mieux, on choisit ici encore la viscosité cinématique ν_f à la température du film T_f. U est ici la "vitesse à l'infini", c'est-à-dire la vitesse suffisamment loin (quelques diamètres) en amont du fil.

Dans notre problème, Nu est fonction de Re_w uniquement. Nous verrons plus loin (paragraphe 1.4) qu'une résolution plus complète suppose également une dépendance en bien d'autres paramètres (nombre de Prandtl, de Mach, rapport d'aspect $l/d\ldots$). A vrai dire, même dans l'hypothèse la plus simple Nu$= f(\mathrm{Re}_w)$, il n'existe pas de solution exacte.

La résolution du problème doit tenir compte de la couche limite de vitesse (épaisseur δ sur laquelle la vitesse passe de U "à l'infini" à 0 à la surface du fil, fig. 1.3a) ainsi que de la couche limite thermique (épaisseur δ_T de fluide sur laquelle la température passe de T_w à essentiellement T_0, fig. 1.3b).

Dans le cas d'un fluide à nombre de Prandtl $\mathrm{Pr} = \nu/\kappa \simeq 1$ (cas des gaz, où diffusion visqueuse = diffusion thermique), on sait que ces deux couches limites sont d'épaisseur comparable, $\delta \simeq \delta_T$. Avec les hypothèses supplémentaires d'un écoulement 2D potentiel (tel que $l/d \gg 1$) et stationnaire, King (1914) propose la loi :

$$\mathrm{Nu} = 1 + \sqrt{2\pi \mathrm{Re}_w}. \tag{1.6}$$

L'hypothèse de stationnarité signifie que le temps caractéristique des fluctuations de vitesse doit être grand comparé au temps d/U d'advection du fluide sur une distance égale au diamètre.

Le résultat remarquable de (1.6) est la variation en $\mathrm{Re}_w^{1/2}$, propre aux transferts de chaleur en écoulement **laminaire** (cette variation provient de la croissance de l'épaisseur des couches limites laminaires, en $\delta \sim x^{1/2}$). En effet, dans le cas d'un fil de diamètre $d = 5$ μm, avec $U = 10$ m/s dans l'air ($\nu_f = 15.10^{-6}$ m^2/s), le nombre de Reynolds est de $Re_w \simeq 3$: l'écoulement autour du fil peut bel et bien être considéré comme **laminaire** (l'écoulement lui-même peut évidemment être turbulent à plus grande échelle, mais le fil est si petit qu'à l'échelle de son diamètre l'écoulement est bien laminaire). C'est toujours dans cette situation que l'on travaillera en pratique. Par ailleurs, l'hypothèse de stationnarité suppose un temps caractéristique des fluctuations turbulentes τ petit devant $d/U = 0.5$ μs (soit 2 MHz), ce qui est amplement vérifié en pratique.

Il existe bien d'autres lois que (1.6), avec des hypothèses moins restrictives. Une des lois

les plus utilisées est la loi de Kramers, qui fait intervenir le nombre de Prandtl :

$$\mathrm{Nu} = 0,42\,\mathrm{Pr}^{1/5} + 0,57\,\sqrt{\mathrm{Re}_w}\,\mathrm{Pr}^{1/3} \tag{1.7}$$

(rappelons que $\mathrm{Pr} \simeq 0,7$ pour l'air et $\mathrm{Pr} \simeq 6$ pour l'eau). On retrouve la dépendance en $\mathrm{Re}_w^{1/2}$ déjà présente dans (1.6), ainsi qu'une dépendance en $\mathrm{Pr}^{1/3}$ propre aux transferts thermiques en couche limite laminaire dans le cas d'un Pr de l'ordre ou supérieur à 1 (Ref. [5], § 9.7). D'une manière générale, nous pourrons écrire notre loi de transfert sous la forme

$$\mathrm{Nu} = a_0 + b_0\sqrt{\mathrm{Re}_w}, \tag{1.8}$$

où les coefficients sans dimension a_0 et b_0 peuvent dépendre de tout (Prandtl, Mach, $l/d\ldots$), sauf évidemment de la vitesse U.

1.2.2 Dépendance $R_w = f(T_w)$

Reprenons notre bilan de puissance (1.5) avec la loi de transfert (1.8) :

$$R_w I^2 = \pi l k_f (T_w - T_0)(a_0 + b_0\sqrt{\mathrm{Re}_w}). \tag{1.9}$$

L'expérimentateur a accès à la tension aux bornes du fil, $e = R_w I$. Mais que mesure-t-il ? Si U augmente, Re_w augmente, et si le courant I reste constant, la tension mesurée $e = R_w I$ reste *a priori* également constante, et l'augmentation de Nu n'implique qu'une diminution de $T_w\ldots$Bref, à moins de mesurer indépendamment T_w, aucun signal électrique ne traduit *a priori* la variation de U : on ne mesure rien. Heureusement, tout le "truc" de l'anémométrie à fil chaud réside dans la dépendance de la résistance R_w en la température T_w, permettant ainsi d'accéder à la température T_w du fil.

Pour les matériaux généralement utilisés, on peut écrire une dépendance linéaire de la résistance avec la température :

$$R_w(T_w) = R_0(1 + \alpha(T_w - T_0)),$$

où le paramètre α

$$\alpha = \frac{1}{R_w}\frac{\partial R_w}{\partial T}$$

(exprimé en K^{-1}) est constant sur une gamme raisonnable de température. Pour les matériaux usuels (tungstène, platine et alliages), on a

$$\alpha \simeq 5.10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1},$$

c'est-à-dire qu'une augmentation de 20 à 40°C fait passer une résistance de 100 Ω à $100(1 + 20\alpha) = 110\ \Omega$. Les paramètres R_0 et T_0 sont des références arbitraires, mais il est évidemment judicieux de choisir T_0 comme la température du fluide et $R_0 = R_w(T_0)$ la résistance correspondante en l'absence de chauffage.

En reportant $T_w - T_0 = (R_w - R_0)/\alpha R_0$ dans (1.9), on obtient la **relation fondamentale de l'anémométrie**, ou **loi de King**[3] :

$$\frac{R_w I^2}{R_w - R_0} = a + b\sqrt{U}, \tag{1.10}$$

[3]bien que cette loi n'utilise pas nécessairement les valeurs des paramètres a et b de l'équation (1.6).

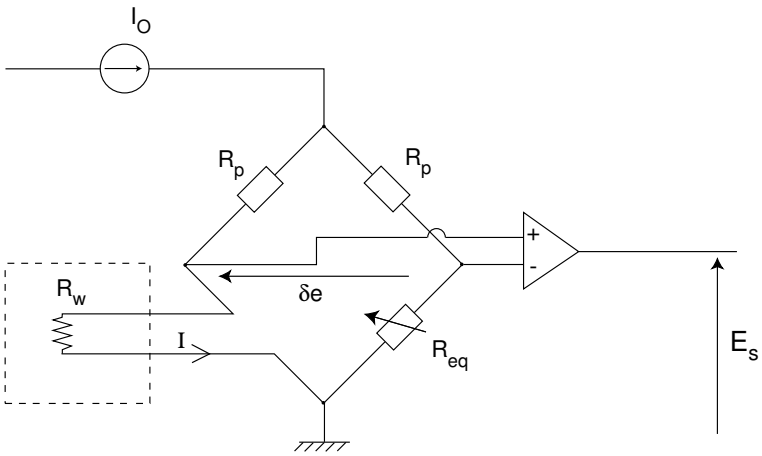


FIG. 1.4 – Circuit électronique utilisé en anémométrie à courant constant.

avec

$$a = \frac{\pi l k}{\alpha R_0} a_0 \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\pi l k}{\alpha R_0} b_0 \sqrt{d/\nu_f}.$$

Cette fois-ci, nous avons bien un lien entre le membre de droite $a + b\sqrt{U}$ et la tension mesurée $e = R_w I$! Deux stratégies s'offrent maintenant à nous :

- Garder le courant I constant et mesurer U à travers les fluctuations de R_w uniquement : c'est l'**Anémométrie à Courant Constant (CCA)** — obsolète aujourd'hui.
- Garder la résistance R_w constante, et donc la température du fil T_w constante, et mesurer U à travers les fluctuations de I : c'est l'**Anémométrie à Température Constante (CTA)**.

Nous allons dans le paragraphe suivant décrire brièvement les deux circuits électroniques correspondant à chacune de ces deux stratégies, en insistant sur la seconde (CTA) qui est la plus répandue.

1.3 Électronique d'asservissement

1.3.1 Anémométrie à Courant Constant (CCA)

La première stratégie, la plus simple, consiste à mesurer les fluctuations de R_w à I constant. Les fluctuations temporelles de vitesse induisent des fluctuations de la résistance de fil, que l'on peut écrire sous la forme

$$R_w(t) = \bar{R_w} + \delta R_w(t).$$

Afin d'obtenir une mesure précise des fluctuations $\delta R_w(t)$, il est judicieux de retrancher la valeur moyenne $\bar{R_w}$. Ceci s'effectue au moyen d'un montage électronique, le pont de Wheatstone, représenté en fig. 1.4. Dans ce circuit, les deux branches sont équilibrées en moyenne (on règle la résistance d'équilibre $R_{eq} = \bar{R_w}$), et reçoivent donc chacune un courant $I = I_0/2$, où $I_0 = cste$ est le courant d'alimentation du pont ; la tension mesurée δe est donc nulle.

Les fluctuations de résistance $\delta R_w(t)$ vont induire un léger déséquilibre du pont, mesurable par la fluctuation de tension

$$\delta e(t) = I(R_w(t) - R_{eq}) = I\,\delta R_w(t).$$

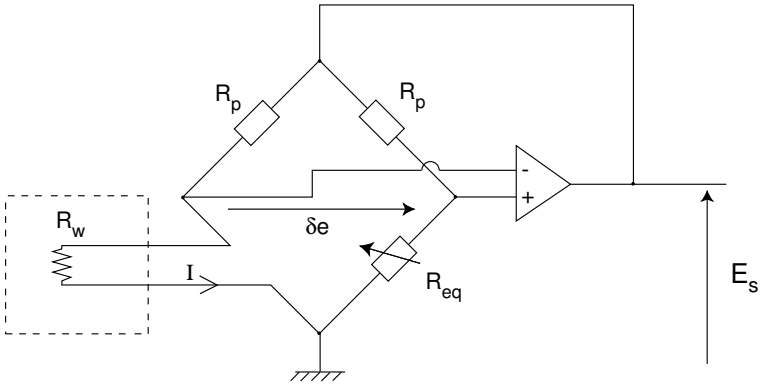


FIG. 1.5 – Circuit électronique avec boucle de rétroaction utilisé en anémométrie à température constante.

L'avantage de cette méthode est que δe est nul en moyenne, et peut donc être amplifié ($E_s = G\,\delta e$, où $G \simeq 10^3$ est le gain de l'amplificateur) afin d'optimiser le rapport signal/bruit.

Cette méthode a été très employée jusque dans les années 1960, où elle a été supplantée par l'anémométrie à température constante, de réalisation plus compliquée mais de principe plus naturel.

Le principal défaut de la CCA tient dans le fait que la température du fil T_w fluctue. Or, le bilan de puissance du paragraphe 1 a été obtenu avec l'hypothèse de stationnarité $T_w = cste$, qui n'est donc pas respectée ici ! Ce bilan peut toutefois rester valide à condition que le temps caractéristique de mise à l'équilibre de la température (inertie thermique $\propto mc$) soit petit comparé au temps typique des fluctuations turbulentes. En pratique, ce temps n'est pas négligeable, et ne permet des mesures qu'à fréquence modérée, limitée typiquement à 700 Hz. Au-delà, le fil chaud agira comme un filtre passe-bas, éventuellement compensable électroniquement.

Un autre problème rend les fluctuations de T_w peu satisfaisantes : la conductivité thermique k et la viscosité cinématique ν sont choisies à la température du film, $k_f = k(T_f) = k((T_w + T_0)/2)$ et $\nu_f = \nu(T_f)$. Bien que cette définition ne soit pas justifiée rigoureusement, il est souhaitable que cette température reste constante afin de ne pas multiplier les raisons possibles de fluctuations de transfert de chaleur.

Notons enfin que, dans la limite d'un courant I très faible, on a $T_w \simeq T_0$, et la mesure de $e = R_w I$ donne donc une mesure de la température du fluide T_0 : c'est le principe du thermomètre à fil froid.

1.3.2 Anémométrie à Température Constante (CTA)

Les défauts de la CCA (inertie thermique et propriétés physiques du film variables) seront corrigés si l'on trouve le moyen de garder la température du fil T_w, et donc la résistance R_w, constante : c'est le principe de la CTA.

Dans cette seconde stratégie, c'est le courant I qui fluctue, et que l'on mesure à travers les fluctuations de la tension $e(t) = R_w I(t)$. Ainsi, l'équation fondamentale de l'anémométrie (1.10) devient $e = R_w I = \sqrt{R_w(R_w - R_0)(a + b\sqrt{U})}$, soit une tension de sortie

$$E_s = \sqrt{A + B\sqrt{U}}. \tag{1.11}$$

Les constantes A et B peuvent dépendre des nombres sans dimension mentionnés précédemment (Prandtl, Mach, $l/d\ldots$).

Comment réaliser cette condition $T_w = cste$?

Supposons une augmentation brusque de la vitesse U, conduisant à une diminution de T_w et donc de R_w. La tension $e = R_w I$ diminue. Il faut trouver un moyen d'augmenter I afin de chauffer la sonde, et ainsi rétablir R_w et T_w à leur valeur initiale. Pour cela, il faut introduire une rétroaction (*feedback*) négative entre e et I : cette rétroaction est effectuée en bouclant la mesure du pont $-\delta e = -I(R_w - R_0)$ sur l'alimentation du pont lui-même (voir le schéma électronique, fig. 1.5). Ainsi, la diminution de δe va conduire à une augmentation de I, et R_w va retrouver sa valeur initiale. La mesure de la rétroaction $E_s = G\,\delta e$ (où G est le gain de l'amplificateur) fournit donc le signal recherché.

Contrairement au circuit CCA, ici le pont n'est jamais à l'équilibre : la tension E_s mesure justement le déséquilibre du pont, maintenu grâce à la rétroaction. L'amplitude moyenne de ce déséquilibre est réglée au moyen de la résistance R_{eq} ($\neq \bar{R}_w$ dans ce cas), permettant ainsi de choisir la température d'asservissement T_w (voir le paragraphe 1.3.3).

Ces étapes de compensation sont réalisées quasi instantanément par le circuit électronique : le temps caractéristique d'équilibre du pont avec rétroaction n'est limité que par la rapidité de l'électronique, et est donc très petit devant le temps caractéristique d'équilibre thermique de la sonde. Un telle boucle d'asservissement permet de mesurer des fluctuations pouvant atteindre le MHz, amplement suffisantes pour des mesures en écoulement turbulent.

L'étude détaillée du circuit CTA dépasse amplement le cadre de ces notes de cours. D'un point de vue pratique, nous verrons que le temps de réponse d'un tel circuit peut être estimé simplement (paragraphe 1.3.5).

1.3.3 Coefficient de surchauffe

Disposant d'un anémomètre à fil chaud en fonctionnement CTA, le seul paramètre sur lequel on peut jouer est la résistance d'équilibre R_{eq} du pont, ou de façon équivalente le *coefficient de surchauffe* :

$$a = R_w/R_0 \quad > 1$$

(on ne confondra pas ce coefficient a avec celui intervenant dans l'équation 1.10). C'est ce paramètre qui permet en pratique de choisir la température T_w de fonctionnement : $T_w = T_0 + (a-1)/\alpha$. Afin d'optimiser le rapport signal/bruit, il est évidemment avantageux de choisir a suffisamment grand, tout en restant compatible avec la gamme d'amplification du circuit électronique. En pratique, un coefficient de l'ordre de 1,5 à 2 est utilisé (soit une surchauffe $T_w - T_0$ de l'ordre de 100 à 200°C).

Certaines applications particulières nécessitent cependant des précautions liées aux propriétés du fluide. Pour des mesures dans l'eau par exemple, on prendra soin de ne pas avoir $T_w > 100^o$C pour éviter la cavitation sur le fil (nucléation de bulles de vapeur), qui affecterait grandement les transferts de chaleur. Pour l'étude de fluides complexes, pour lesquels une trop forte température altérerait les propriétés du fluide, on doit se contenter d'une surchauffe beaucoup plus basse, de quelques degrés seulement.

1.3.4 Calibration empirique

Puisqu'il est difficile de contrôler tous les paramètres intervenant dans la loi de transfert de chaleur, on procède à une calibration empirique : en fonctionnement CTA, on effectue

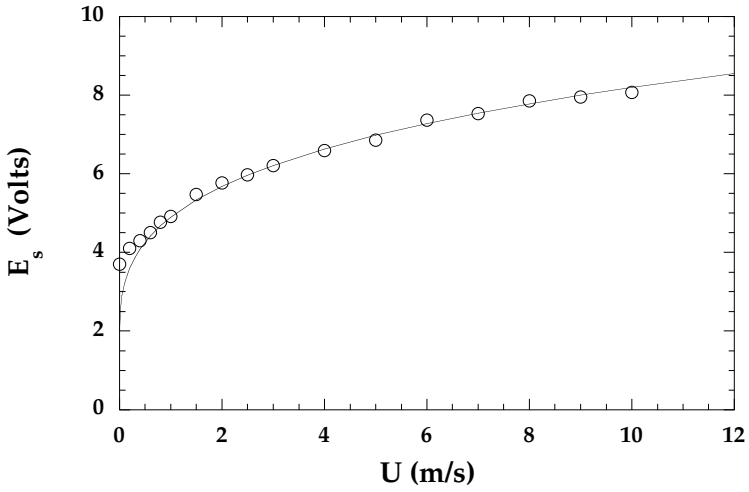


FIG. 1.6 – Exemple de calibration expérimentale avec ajustement par la loi de King (1.11).

une série de mesures de la tension de sortie E_s pour différentes vitesses imposées U (voir la figure 1.6), et on ajuste les coefficients A et B de la loi de King (1.11). Il suffit ensuite d'inverser (électroniquement ou informatiquement) la loi de calibration pour en déduire $U(t)$ à partir du $E_s(t)$ mesuré.

Remarquons que la non-linéarité de cette loi de King (1.11) (c'est-à-dire que ΔE_s n'est pas proportionnel à ΔU) est la principale difficulté de l'utilisation de l'anémométrie à fil chaud : Une petite erreur sur la mesure de E_s peut conduire à une erreur importante sur U. Il convient donc de procéder à la calibration de l'anémomètre avec un grand soin, et de restreindre son utilisation à la plage de valeur où celui-ci a été étalonné. Ce problème de non-linéarité ne se pose pas avec l'anémométrie Laser Doppler, qui présente une réponse linéaire aux fluctuations de vitesse, et donc une moins grande sensibilité aux incertitudes de calibration.

Expérimentalement, on observe qu'une loi de King modifiée,

$$E_s^2 = A + BU^n$$

(avec n entre 0.4 et 0.6), ajuste souvent mieux les données. Afin de déterminer les coefficients A, B et n, on mesure à vitesse nulle[4] $A = E_s^2$, puis on trace en coordonnées logarithmiques

$$\log(E_s^2 - A) = \log B + n \log U.$$

On obtient l'exposant n en mesurant la pente de la droite $\log(E_s^2 - A)$ en fonction de $\log U$, et B grâce à l'ordonnée à l'origine.

Une relation empirique de ce type souvent utilisée est la relation de Collis et Williams (1959), qui donne

$$\begin{aligned} n &= 0,45 \qquad \text{pour} \qquad 0,02 < \mathrm{Re}_w < 44, \\ n &= 0,51 \qquad \text{pour} \qquad 44 < \mathrm{Re}_w < 140. \end{aligned}$$

La tendance de n avec Re_w se comprend bien physiquement : en deçà de $\mathrm{Re}_w \simeq 44$, l'écoulement en aval du cylindre est stationnaire (et composé de deux zones de recirculation symétriques

[4]en se méfiant des effets de convection naturelle, voir paragraphe 1.4.2.

pour $\mathrm{Re}_w > 5$). Au-delà de $\mathrm{Re}_w \simeq 44$, l'écoulement devient asymétrique et instationnaire, et des tourbillons se détachent périodiquement du cylindre[5]. On comprend bien que ces tourbillons vont emporter du fluide chaud, favorisant ainsi le transfert de chaleur, conduisant à un exposant n plus grand. Pour $\mathrm{Re}_w > 140$, l'écoulement devient désordonné, le transfert de chaleur est encore meilleur, mais cette situation n'est pas rencontrée en pratique pour les anémomètres usuels.

1.3.5 Réponse en fréquence

Il est fondamental de pouvoir caractériser précisément la fréquence maximale des variations de vitesse que l'anémomètre sera capable de mesurer, spécialement si l'on s'intéresse aux fluctuations turbulentes. Ce problème est assez délicat, car intervient un grand nombre de paramètres, liés aux propriétés du fil chaud lui-même ainsi que de l'électronique d'asservissement. On préférera une approche pratique, qui consiste à mesurer le temps de relaxation du signal de sortie en réponse à une perturbation extérieure bien contrôlée. Cependant, il est clair qu'imposer une fluctuation de vitesse de durée et d'amplitude bien calibrées est une tâche quasiment impossible. On emploie alors la méthode dite du *square wave test* (test du créneau), consistant à imposer un saut instantané de tension aux bornes de l'anémomètre et d'en observer la conséquence sur $E_s(t)$.

Cette méthode repose sur l'idée qu'une fluctuation de vitesse U conduit à une fluctuation de température T_w, qui revient à l'équilibre soit au bout d'un temps lié à l'inertie thermique (CCA), soit lié au temps de compensation de la rétroaction (CTA). Dans tous les cas, le *square wave test* simule un tel saut de vitesse en imposant un saut de température par effet Joule[6]. Le signal de sortie $E_s(t)$ consiste alors en un saut, qui relaxe approximativement de façon exponentielle $\sim e^{-t/t_0}$, permettant une mesure pratique du temps de réponse t_0. Ce temps peut dépendre de nombreux facteurs, notamment du coefficient de surchauffe a et du gain de la boucle de rétroaction G.

Ce temps de réponse t_0 intègre tous les temps de réponse présents dans le système : inertie thermique, effets capacitifs dans les câblages, réponse de l'électronique...Pour les anémomètres usuels en fonctionnement CCA, on obtient une fréquence de coupure $f_c \sim 1/t_0$ de l'ordre de 700 Hz, tandis qu'en fonctionnement CTA cette fréquence peut atteindre le MHz. Notons que, dans ce dernier cas, un autre effet lié à la résolution spatiale (de l'ordre de l, voir paragraphe 1.4.3) limite en fait la résolution temporelle à $f_c \sim U/l \simeq 10 - 100$ kHz.

1.4 Divers raffinements

En toute généralité, le nombre de Nusselt, caractérisant l'efficacité du transfert convectif de chaleur, est fonction des paramètres suivants :

$$\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}_w, \mathrm{Pr}, \mathrm{Ma}, \mathrm{Kn}, l/d, a).$$

Comme nous l'avons dit, il n'existe pas d'expression générale de Nu en fonction de tous ces paramètres. On peut se contenter de certaines expressions empiriques de Nu en fonction du

[5]Cette situation présente l'inconvénient d'induire une haute fréquence parasite dans le signal $\sim d/5U$, surtout si le détachement tourbillonnaire se trouve à la fréquence de résonnance du fil tendu.

[6]Notons ici le défaut de cette méthode : alors que la fluctuation de vitesse induit un changement *superficiel* de température (*via* le transfert thermique en *surface*), le *square wave test* impose un chauffage en *volume* par effet Joule.

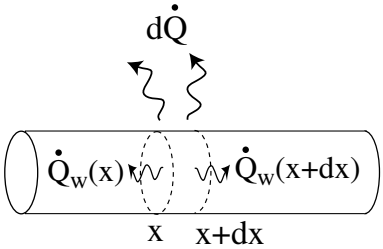


FIG. 1.7 – Bilan de puissance sur une petite tranche d'épaisseur dx du fil.

type de mesures que l'on souhaite effectuer[7].

L'influence du nombre de Prandtl a déjà été discutée plus haut. Dans notre analyse, nous avons effectué les hypothèses suivantes :

- Nombre de Mach Ma $\ll 1$. Dans le cas contraires (écoulements compressibles, voire supersoniques), bien que l'écoulement puisse être très différent au voisinage du fil, on trouve toujours expérimentalement une loi en $\mathrm{Nu} \propto \mathrm{Re}_w^{1/2}$.
- Nombre de Knudsen $\mathrm{Kn} = \lambda/d \ll 1$, qui compare le libre parcours moyen des atomes ou molécules constituant le fluide au diamètre du fil. L'hypothèse du milieu continu est valable pour $\mathrm{Kn} \ll 1$. Dans le cas contraire ($\mathrm{Kn} \simeq 1$, gaz raréfiés), les transferts de chaleurs sont diminués.
- Rapport d'aspect $l/d \gg 1$. Lorsque ce rapport n'est pas suffisamment grand, divers effets interviennent : perturbation des supports du fil, contribution de la composante axiale de la vitesse, et non uniformité de la température du fil. Nous examinerons le deuxième et le troisième effet.
- Coefficient de surchauffe $a = R_w/R_0$ proche de 1. Nous avons déjà discuté l'influence de a sur les contraintes liées à certains fluides (1.3.3). Nous examinerons maintenant le problème de la convection naturelle.

1.4.1 Le profil de température

Afin d'établir la relation fondamentale (1.10), nous avons supposé que la température du fil T_w était indépendante du temps (ce qui est possible grâce au montage CTA) et uniforme le long du fil, ce qui suppose $l/d \gg 1$. En pratique, il est important de savoir en quoi la longueur finie du fil influe sur les transferts de chaleur. Nous allons donc chercher à établir le profil de température $T_w(x)$, en supposant pour simplifier le problème en régime permanent ($U = cste$, $\partial T_w/\partial t = 0$).

Supposons un fil de longueur l dont les extrémités, en $x = -l/2$ et $x = l/2$ sont reliées aux supports (broches) à température T_0 égale à celle du fluide. Nous allons devoir tenir compte du terme de conduction du fil vers le support $\sim k_w(T_w - T_0)$ (où cette fois k_w est la conductivité thermique du fil, typiquement 100 $\mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}}$ pour le tungstène) mentionné au premier paragraphe.

Considérons une tranche de fil de longueur infinitésimale dx et de section $\mathcal{S} = \pi d^2/4$ (voir la figure 1.7), et écrivons un bilan de puissance sur cette petite tranche :

- La puissance apportée par effet Joule est $d\dot{W} = (R_w\, dx/l)I^2$, où $(R_w\, dx/l)$ est la résistance de la petite tranche.

[7] Plus de 2500 publications sont parues sur ce sujet depuis le travail de King (1914) !

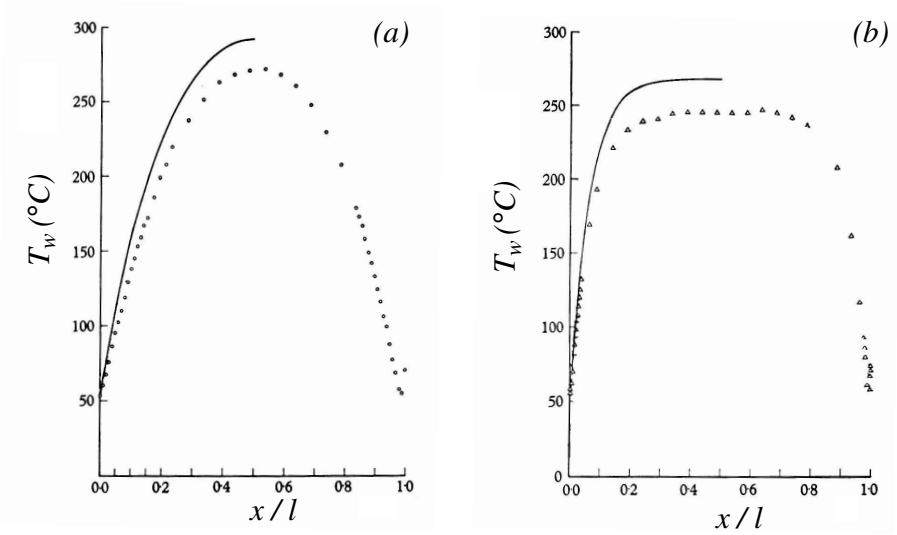


FIG. 1.8 – Profil de température le long du fil. (a) : $l/d \simeq 100$. (b) : $l/d \simeq 400$. Le trait plein est la prédiction (1.14) pour $x < l/2$. D'après Champagne *et al* (1967), reproduit de Lomas (1986) [4].

- La puissance transférée au fluide s'exprime sous la forme $d\dot{Q} = \pi\, dx\, k_f(T_w(x) - T_0)\mathrm{Nu}$, où l'on a repris l'expression de $\dot{Q}$ (1.3) en remplaçant l par dx, avec T_w dépendant de x cette fois-ci.
- Enfin, deux termes de transfert conductifs, l'un vers la gauche (en x) et l'autre vers la droite (en $x + dx$), dont le bilan peut s'écrire

$$d\dot{Q}_w = \dot{Q}_w(x + dx) - \dot{Q}_w(x) = \mathcal{S}k_w \frac{\partial T_w}{\partial x}\Big)_{x+dx} - \mathcal{S}k_w \frac{\partial T_w}{\partial x}\Big)_x = \mathcal{S}k_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} dx$$

(où l'on néglige la variation de k_w avec la température).

Tenant compte de ce terme supplémentaire, le bilan de puissance $d\dot{Q}_w + d\dot{W} = d\dot{Q}$ s'écrit pour la tranche infinitésimale (en divisant l'équation par dx/l) :

$$\frac{\pi d^2}{4} l k_w \frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + R_w I^2 = \pi l k_f (T_w(x) - T_0)\mathrm{Nu}.$$

En posant $\theta(x) = T_w(x) - T_0$, et en reprenant l'expression $R_w = R_0(1 + \alpha\theta)$, on obtient :

$$\frac{\pi d^2}{4} l k_w \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + R_0(1 + \alpha\theta) I^2 = \pi l k_f \theta \mathrm{Nu},$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + K_1 \theta = K_2, \tag{1.12}$$

où l'on a posé :

$$K_1 = \frac{4\alpha R_0 I^2}{\pi d^2 l k_w} - \frac{4 k_f \mathrm{Nu}}{k_w d^2} \qquad \text{et} \qquad K_2 = -\frac{4 R_0 I^2}{\pi d^2 l k_w}. \tag{1.13}$$

La solution de l'équation différentielle (1.12) dépend du signe de K_1 : Oscillations pour $K_1 > 0$ (cf. l'équation $m\ddot{x}+kx = 0$) ou relaxation exponentielle pour $K_1 < 0$. On peut en fait montrer que K_1 est toujours négatif en pratique : en écrivant $K_1 = p - q$, on peut former le rapport

$$\frac{p}{q} = \frac{\alpha R_0 I^2}{\mathrm{Nu}\,\pi l k_f} \simeq \alpha(T_w - T_0)$$

(car, en ordre de grandeur, on a toujours $R_0 I^2 \sim \pi l k_f (T_w - T_0)\mathrm{Nu}$.) Avec les valeurs données précédemment, $\alpha \simeq 5.10^{-3}$ K^{-1}, on voit que $p/q < 1$, soit $K_1 < 0$. La solution de l'équation différentielle est donc du type exponentielle,

$$\theta(x) = c_0 + c_1 e^{-x/l_c} + c_2 e^{x/l_c},$$

où l'on a introduit la "longueur de refroidissement" ("*cooling length*") $l_c = 1/\sqrt{|K_1|}$, soit (en négligeant la première contribution du terme K_1, eq. (1.13)) :

$$l_c \simeq \frac{d}{2}\sqrt{\frac{k_w}{k_f \mathrm{Nu}}}.$$

En utilisant les conditions aux limites, on obtient finalement le profil de température dans le fil $T_w(x) = cste + cste' \cosh(x/l_c)$, qui est maximal au centre et vaut T_0 en $x = \pm l/2$, permettant d'identifier les constantes :

$$T_w(x) = T_{max} + (T_0 - T_{max})\frac{\cosh(x/l_c) - 1}{\cosh(l/2l_c) - 1}. \tag{1.14}$$

On a donc $T_w(x) \simeq T_{max}$ dans la région centrale, raccordé aux extrémités $T_w(\pm l/2) = T_0$ sur une distance caractéristique $l_c \simeq d(k_w/4k_f\mathrm{Nu})^{1/2}$.

Avec les ordres de grandeurs pour les conductivités thermiques k_w et k_f, et $\mathrm{Nu} \simeq 10$, on a $l_c \simeq 30d$. Puisqu'on veut une température du fil la plus uniforme possible, on va chercher à avoir $l_c \ll l$, et donc à minimiser le diamètre du fil d. Avec les valeurs numériques déjà mentionnées, on peut calculer par exemple $l_c \simeq 0.4l$ pour $l/d = 100$ et $l_c \simeq 0.1l$ pour $l/d = 400$ (fig. 1.8). Dans ces conditions, environ 20 % à 80 % de la région centrale est à température $T_w \simeq T_{max} = cste$. On voit qu'il est donc très important de chercher à minimiser la conductivité thermique k_w et à maximiser le rapport d'aspect l/d, tout en gardant l d'une taille raisonnable. En pratique, $l \simeq 1$ mm et $d \simeq 5$ μm ($l/d \simeq 200$) sont un bon compromis.

1.4.2 Limitation par convection naturelle

Un fil chauffé dans un fluide au repos peut provoquer un courant de *convection naturelle* : le fluide chauffé, plus léger, subit une force ascendante (poussée d'Archimède), emportant ainsi la chaleur du fil même dans un fluide initialement au repos (Ref. [5], § 10.1). Cet effet parasite risque de modifier la loi de transfert de chaleur établie précédemment, basée uniquement sur la *convection forcée* de la chaleur par le fluide en mouvement. Il en résultera un nombre de Nusselt mesuré supérieur au nombre de Nusselt attendu, conduisant à sur-estimer la vitesse réelle de l'écoulement [8]. Pour cette raison, il est important d'estimer la vitesse minimale d'utilisation U, en-dessous de laquelle un tel effet risque d'intervenir.

[8] Voir par exemple la courbe de calibration (Fig. 1.6), pour laquelle les points de mesure surestiment l'ajustement par la loi de King pour U faible.

Pour cela, nous allons estimer la poussée d'Archimède subie par le film fluide au voisinage du fil et la comparer aux forces de frottement visqueux. Afin de simplifier la géométrie, tout en gardant la symétrie du problème, on va considérer un élément de fluide cylindrique, de longueur l et de diamètre d, porté à la température du fil T_w. Cet élément de fluide moins dense subit la poussée d'Archimède (ascendante) et est freiné par la force de frottement visqueux (descendante).

La force de flottaison (résultante poids – poussée d'Archimède) exercée sur un cylindre de fluide de volume $\sim ld^2$ s'écrit $F_A = \Delta\rho\, ld^2\, g$, où g est l'accélération de la pesanteur et $\Delta\rho$ la différence de densité due à la différence de température $\Delta T = T_w - T_0$ entre l'élément de fluide considéré et le fluide environnant. En écrivant le coefficient de dilatation thermique

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial T} \qquad > 0$$

(exprimé en K^{-1}, positif car augmenter la température diminue la densité), on obtient $\Delta\rho = -\beta\rho_0\,\Delta T_0$ (où ρ_0 est la densité du fluide à la température T_0) et cette force devient

$$F_A = \beta\rho_0\,\Delta T\, ld^2\, g.$$

Dans le cas d'un gaz parfait, l'équation d'état $p \sim \rho T$ permet d'écrire $\beta = 1/T_0 \simeq 1/300\ \mathrm{K}^{-1}$. Cette force ascendante va mettre l'élément de fluide en mouvement vers le haut.

Cette force va être compensée par une force de frottement visqueux $F_v \simeq \mathcal{A}\tau_v$, avec $\mathcal{A} \simeq ld$ la surface du cylindre de fluide et $\tau_v \simeq -\eta v/d$ la contrainte visqueuse (dirigée vers le bas), soit

$$F_v = -\eta v l,$$

(force de Stokes), où v est la vitesse ascendante du fluide. On a considéré ici que le gradient de vitesse était concentré sur une épaisseur de l'ordre de d. Pour une faible température, F_v compense F_A et le fluide reste stable. En revanche à température plus élevée, après un temps d'accélération, l'élément de fluide atteint une vitesse limite v_{lim} donnée par l'équilibre des forces $F_v + F_A = 0$, soit :

$$v_{lim} \simeq \frac{\Delta T}{T_0}\frac{gd^2}{\nu}.$$

Pour des vitesses d'écoulement U de l'ordre de cette vitesse limite, on doit s'attendre à une convection naturelle parasite non négligeables. Pour les valeurs usuelles (avec $\Delta T \simeq 100$ K), ce calcul donne $v_{lim} \simeq 10\ \mu$/s, ce qui est très faible et ne semble donc pas poser de problèmes *a priori*.

Cependant, on montre expérimentalement que les effets de convection naturelle, même s'ils ne prédominent pas, peuvent affecter les résultats de manière non négligeable même à des vitesse U de l'ordre de 10 cm/s dans l'air (et $<$ cm/s dans l'eau). Ceci fixe la limite inférieure d'utilisation du fil chaud dans les conditions usuelles.

1.4.3 Sensibilité angulaire

Jusqu'à présent nous nous sommes contentés d'examiner l'influence de la vitesse sur le transfert de chaleur, mais nous n'avons pas examiné l'influence de la *direction* de la vitesse.

Supposons le fil selon z, et soit (x, y) le plan normal au fil (fig. 1.9). La norme de la vitesse U peut se décomposer :

$$U = \sqrt{u_\perp^2 + u_z^2}, \qquad \text{avec} \quad u_\perp^2 = u_x^2 + u_y^2.$$

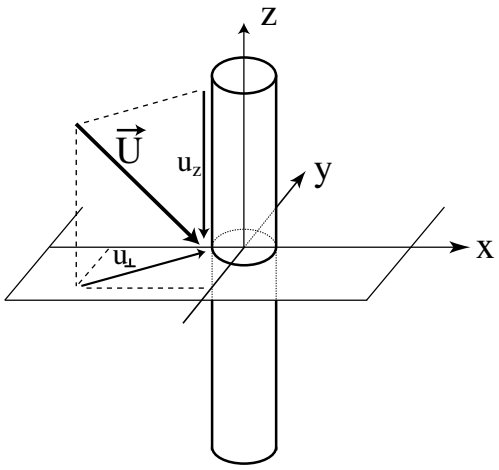


FIG. 1.9 – Décomposition de la vitesse incidente $\vec{U}$ en une composante axiale u_z et une composante normale $u_\perp = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ dans le plan (x, y).

Dans le cas d'un fil infiniment long, il est clair que la composante u_z ne peut pas participer au transfert de la chaleur fil $\rightarrow$ fluide. L'anémomètre ne sera sensible qu'à la composante normale $u_\perp$. Toutefois, dans le cas plus réaliste d'un fil de longueur finie, la composante u_z pourra intervenir *via* un transfert de chaleur au niveau des extrémités du fil, et l'anémomètre "sentira" une vitesse effective

$$U_{eff} = \sqrt{u_\perp^2 + k^2 u_z^2},$$

où le coefficient k dépend du rapport d'aspect l/d, et doit tendre vers 0 pour $l/d \rightarrow \infty$. La figure 1.10 montre qu'à partir de $l/d > 400$ environ, le fil chaud mesure bien $u_\perp$ à mieux que 10 %. Le cas $l/d \simeq 1$ doit conduire à $k \simeq 1$, c'est la situation d'un anémomètre isotrope. Cependant, nous avons vu (paragraphe 1.4.1) que ce cas n'est pas compatible avec une température $T_w(x)$ uniforme le long du fil.

Par ailleurs, nous verrons au paragraphe 1.5.1 que dans le cas de mesure de fluctuations turbulentes à grande vitesse d'advection, l'anémomètre ne sera sensible essentiellement qu'à la composante u_x de la vitesse (dans la direction de $\bar{u}$).

Notons ici que, dans le cas où le champ de vitesse présente des variations sur des distances inférieures à l, le fil ne sera sensible qu'au transfert moyen de chaleur, c'est-à-dire à la norme $u_\perp$ moyennée selon z : la résolution spatiale du fil chaud est donc limitée à l, et non à d comme on pourrait s'y attendre. Comme vu au paragraphe (1.3.5) il en découle une résolution temporelle de l'ordre de $f_c \sim U/l \sim 10 - 100$ kHz.

1.4.4 Quelques extensions possibles

A partir du principe de base de l'anémométrie à fil chaud, de nombreuses variantes existent afin d'étendre ou d'affiner les mesures possibles :

- Anémomètres en X : ensemble de deux (ou plus) anémomètres croisés afin de mesurer plusieurs composantes de la vitesse (fig. 1.11a,c,e), en d'en déduire par exemple une (ou plusieurs) composantes de la vorticité.

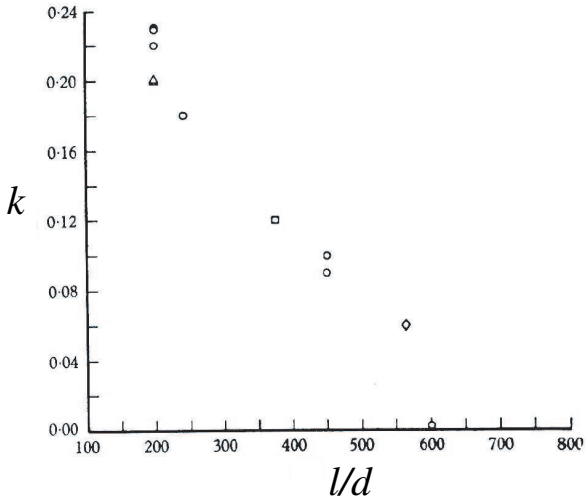


FIG. 1.10 – Coefficient k de sensibilité à la composante axiale de la vitesse en fonction du rapport d'aspect l/d. D'après Champagne *et al* (1967), reproduit de Lomas (1986) [4].

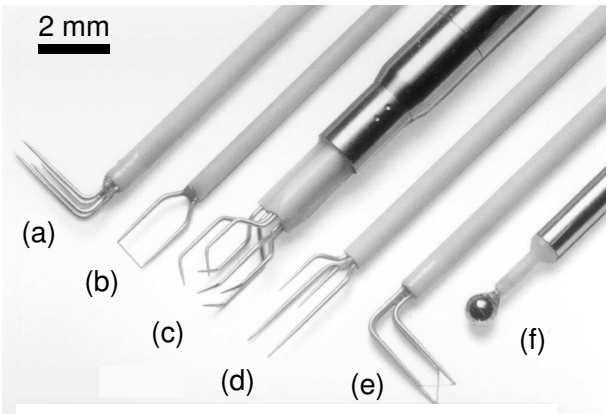


FIG. 1.11 – Quelques anémomètres. (b) : Fil chaud simple, (a)-(e) : fils chauds doubles, (c) : fil chaud triple, (d) : fil chaud avec thermomètre à fil froid, (f) : film chaud sphérique. D'après document Dantec [1].

– Anémomètres avec correction de température : un petit thermomètre (*fil froid*) placé à proximité du fil chaud permet de compenser les fluctuations de température du fluide (fig. 1.11d). Nécessite une calibration des coefficients de la loi d'étalonnage à différentes valeurs de la température. Se méfier de possibles contaminations (le fil chaud chauffe le fil froid !). Permet en outre des mesures de corrélation vitesse – température.
– Anémomètres à films chauds, ou le fil est remplacé par petit dépôt de nickel sur un support de quartz, souvent conique ou biseautée, voire sphérique (pour mesures isotropes, cf. fig. 1.11f). Plus intrusifs et de résolution spatiale moindre, les anémomètres à films chauds sont utiles pour des mesures en présence d'impuretés qui pourraient endommager le fil (notamment dans l'eau non filtrée), voire dans des fluides corrosifs.

1.5 Mesures des fluctuations turbulentes

1.5.1 Sélection de la composante longitudinale de la vitesse

Idéalement, l'anémomètre à fil chaud n'est sensible qu'à la composante de la vitesse dans le plan (x, y) normal au fil, $u_\perp = \sqrt{u^2 + v^2}$ (paragraphe 1.4.3). Cependant, dans la plupart des cas, l'expérimentateur sera intéressé par la mesure d'une seule composante de la vitesse, par exemple $u(t)$ selon x. Une telle mesure est toutefois possible dans certaines conditions.

Supposons un écoulement turbulent advecté à une vitesse moyenne $\bar{u}$ dirigée selon x, orthogonale à l'axe z du fil. On suppose que la turbulence est isotrope, c'est-à-dire que les fluctuations quadratiques moyennes $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ et $\overline{w'^2}$ sont égales, et on note

$$\tau = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\bar{u}}$$

le *taux de fluctuation*, supposé $\ll 1$ (écoulement moyen très grand devant les fluctuations turbulentes). En décomposant la vitesse sous la forme *moyenne + fluctuation* $u(t) = \bar{u} + u'(t)$, la mesure instantanée de la vitesse $u_\perp(t)$ peut s'écrire au premier ordre :

$$u_\perp(t) = \sqrt{(\bar{u} + u'(t))^2 + v'(t)^2} \simeq \bar{u}\sqrt{1 + 2\frac{u'(t)}{\bar{u}} + \frac{u'(t)^2}{\bar{u}^2} + \frac{v'(t)^2}{\bar{u}^2}} \simeq \bar{u} + u'(t) + o(\tau^2),$$

c'est-à-dire que l'anémomètre est essentiellement sensible à la composante de la vitesse parallèle à l'écoulement moyen (selon x). En moyennant cette équation, on obtient la vitesse moyenne apparente

$$\bar{u}_\perp \simeq \bar{u}\,(1 + \tau^2),$$

qui est bien égale à $\bar{u}$ au premier ordre.

Si en revanche la condition de forte advection ($\tau \ll 1$) n'est pas respectée, il est impossible de séparer les contributions u et v de la vitesse mesurée $u_\perp$; en outre, la vitesse moyenne apparente $\bar{u}_\perp$ ainsi que l'écart-type des fluctuations ne seront pas facilement liées aux vraies valeurs, conduisant à une sous-estimation du taux de fluctuation réel.

Il faut donc veiller à toujours utiliser un anémomètre à fil chaud à faible taux de turbulence, typiquement $\tau < 20$ %.

1.5.2 L'hypothèse de Taylor

La dérivée temporelle du signal mesuré en un point fixe, $\partial u/\partial t$, peut s'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{Du}{Dt} - (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})u,$$

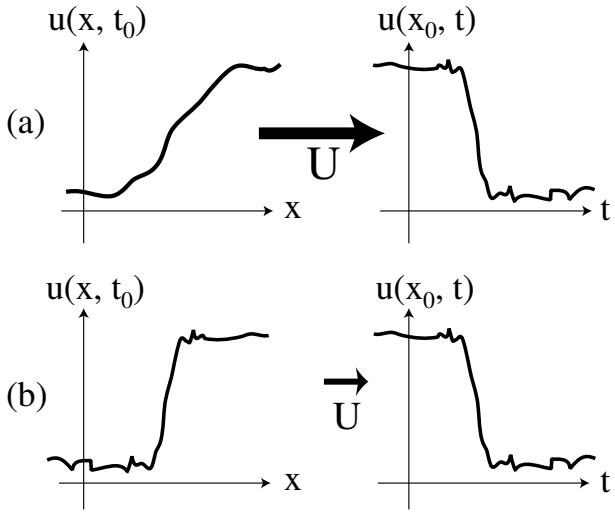


FIG. 1.12 – A gauche, coupe selon x du champ de vitesse instantané ; à droite, signal temporel mesuré en un point x_0. Une dérivée spatiale faible advectée à vitesse U forte (a) donnera le même signal temporel qu'une dérivée spatiale forte advectée à vitesse U faible (b).

où Du/Dt est la variation temporelle de la vitesse le long d'une trajectoire (accélération lagrangienne). Ainsi, mesurer une forte fluctuation temporelle $\partial u/\partial t$ peut avoir plusieurs origines :

- soit il s'agit d'une "vraie" fluctuation temporelle Du/Dt, c'est-à-dire d'une accélération (ou décélération) importante le long d'une trajectoire (sous l'effet d'un gradient de pression),
- soit il s'agit d'une variation spatiale faible advectée rapidement ($\vec{u}$ élevé $\cdot\vec{\nabla}u$ faible) : fig. 1.12a,
- soit il s'agit d'une forte variation spatiale advectée lentement ($\vec{u}$ faible $\cdot\vec{\nabla}u$ élevé) : fig. 1.12b.

Le premier cas ne joue aucun rôle en pratique : le temps d'advection sur le diamètre de la sonde, $d/\bar{u}$, étant toujours très faible devant le temps typique des fluctuations turbulentes, il n'y a aucun espoir de mesurer de "vraies" fluctuations temporelles.

Dans le cas de la forte advection (taux de fluctuation $\tau \ll 1$), c'est le second cas qui est le plus pertinent. Si on écrit $\vec{u}(t) = \bar{u}\vec{e}_x + \vec{u}'(t)$, avec $\partial\bar{u}/\partial t = 0$ et $\vec{\nabla}(\bar{u}\vec{e}_x) = \partial\bar{u}/\partial x \simeq 0$, on mesure

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq -[\vec{u}\cdot\vec{\nabla}]u = -[(\bar{u}\vec{e}_x + \vec{u}'(t))\cdot\vec{\nabla}](\bar{u} + u'(t)) \simeq -\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x}.$$

La mesure de la dérivée temporelle en un point renseigne ainsi essentiellement sur la dérivée spatiale *longitudinale* (le long de $\bar{u}\vec{e}_x$) de $\vec{u}'(t)$. Cette équation équivaut à écrire

$$u'(x_0, t_0 + t) \simeq u'(x_0 - \bar{u}t, t_0)$$

qui signifie : la vitesse mesurée à $t_0 + t$ est la même que celle présente à t_0 à une distance $\bar{u}t$ **en amont** (car, pendant ce temps t, le champ de vitesse n'a pas eu le temps d'évoluer sensiblement).

Cette équivalence porte le nom d'**hypothèse de Taylor**, ou **hypothèse de la turbulence gelée**. En effet, on peut voir le signal temporel $u'(t)$ mesuré à position $x = x_0$ fixée

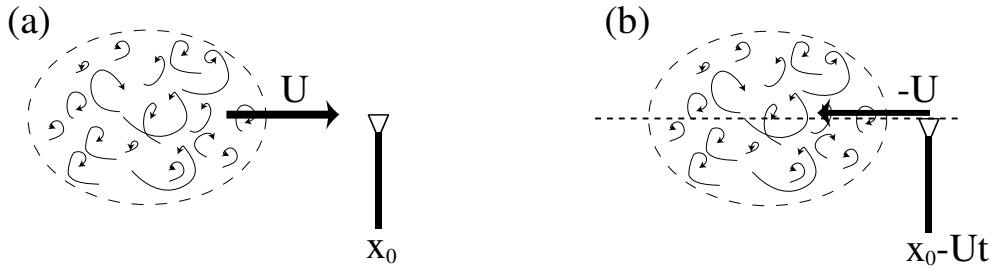


FIG. 1.13 – L'hypothèse de Taylor : Si U est très élevé, (a) un champ de vitesse turbulent passant à vitesse U sur une sonde fixe en x_0 est équivalent à (b) un champ de vitesse immobile traversé à vitesse $-U$ par une sonde mobile.

comme une coupe spatiale $u'(-x)$ à $t = t_0$ fixé. On peut imaginer un champ de vitesse figé (*gelé*), traversé par la trajectoire d'une sonde infiniment rapide qui "verrait" une coupe $u'(-x)$ instantanément (fig. 1.13).

De même que la sélection de la composante longitudinale (par. 1.5.1), l'hypothèse de Taylor n'est valable que dans la limite $\tau \ll 1$. Cette hypothèse est très bien vérifiée en soufflerie, turbulence de grille ($\tau = 3$ à 8 %), mais peut être sujette à caution en turbulence de jet ($\tau \sim 25$ %) et en turbulence atmosphérique (25 jusqu'à 35 %).

L'hypothèse de Taylor joue un rôle clef dans les analyses statistiques des fluctuations turbulentes. La dissipation d'énergie ou les structures tourbillonnaires, par exemple, sont liées aux fluctuations *spatiales* et non *temporelles* du champ de vitesse.

1.6 Ce qu'il faut retenir, en 5 formules

Le bilan de puissance sur un fil est donné par

$$R_w I^2 = \pi l k_f (T_w - T_0)\mathrm{Nu},$$

où le nombre de Nusselt $\mathrm{Nu} = f(\mathrm{Re}_w)$ mesure l'efficacité du transfert convectif. Ce nombre peut s'écrire $\mathrm{Nu} = a_0 + b_0\sqrt{\mathrm{Re}_w}$, conduisant à la relation fondamentale de l'anémométrie

$$\frac{R_w I^2}{R_w - R_0} = a + b\sqrt{U}.$$

En utilisant dans le circuit à température constante (CTA), la relation précédente permet d'en déduire la tension en sortie E_s :

$$E_s = \sqrt{A + B\sqrt{U}}.$$

L'utilisation en CTA permet de s'affranchir de l'inertie thermique de la sonde, et permet ainsi d'atteindre une résolution temporelle de l'ordre de 100 kHz. En présence d'un écoulement moyen $\bar{u}$ fort, la vitesse mesurée instantanée est essentiellement la composante selon U de la vitesse instantanée :

$$u_\perp(t) = \bar{u} + u'(t).$$

Cette mesure temporelle peut s'interpréter, *via* l'hypothèse de Taylor (forte advection moyenne), comme une mesure spatiale :

$$u'(x) \simeq u'(x_0 - \bar{u}t).$$

1.7 Annexes

Fluides à 20^oC	Air	Eau
Densité	$\rho = 1,2$ Kg/m^3	$\rho = 1000$ Kg/m^3
Viscosité dynamique	$\eta = 18\ 10^{-6}$ Kg.m^{-1}.s^{-1}	$\eta = 10^{-3}$ Kg.m^{-1}.s^{-1}
Viscosité cinématique	$\nu = 15\ 10^{-6}$ m^2/s	$\nu = 10^{-6}$ m^2/s
Nombre de Prandtl	$Pr = 0,7$	$Pr = 7$
Conductivité thermique	$k_f = 0,02$ W.K^{-1}.m^{-1}	$k_f = 0,6$ W.K^{-1}.m^{-1}
Chaleur massique	$c_p = 1000$ J.Kg^{-1}.K^{-1}	$c_p = 4200$ J.Kg^{-1}.K^{-1}

Fils à 200^oC	Tungstène (W)	Platine (Pt)
Densité	$\rho = 19\ 10^3$ Kg/m^3	$\rho = 21\ 10^3$ Kg/m^3
Conductivité thermique	$k_w = 155$ W.K^{-1}.m^{-1}	$k_w = 70$ W.K^{-1}.m^{-1}
Chaleur massique	$c = 130$ J.Kg^{-1}.K^{-1}	$c = 130$ J.Kg^{-1}.K^{-1}
Coefficient	$\alpha = 4,5\ 10^{-3}$ K^{-1}	$\alpha = 3,9\ 10^{-3}$ K^{-1}
Résistivité ($R = \rho_r l/\mathcal{S}$)	$\rho_r = 0,55\ 10^{-7}$ Ω.m	$\rho_r = 10^{-7}$ Ω.m

Bibliographie

[1] Document Dantec “Streamline” (1999), n° 194-111-02.

[2] R.J. Goldstein (1983) : Fluid Mechanics Measurements – chapitre 3.

[3] J.O. Hinze (1975) : Turbulence, McGraw-Hill Book Cie, Inc – chapitre 2.

[4] C.G. Lomas (1986) : Fundamentals of hot wire anemometry, Cambridge Univ. Press.

[5] E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit (2001) : Hydrodynamique physique, CNRS Ed.