A14. Filtrage analogique

Fonction de transfert harmonique d'un filtre

• *Systèmes linéaires*

Un système linéaire est régi par une *équation différentielle linéaire.* Une équation différentielle linéaire contient des termes différentiels du 1er ordre, du 2° ordre, etc, mais ne contient pas de termes élevés à une puissance (carré, cube, etc).

- *Variables*

On peut décrire le comportement du système dans le *domaine temporel* (variable *t*, en s) par son *équation différentielle* ou dans le *domaine fréquentiel* (variable *f* en Hz ou $\omega = 2\pi f$ en rad/s) par sa *fonction de transfert harmonique.*

Cependant, alors que l'équation différentielle s'applique à n'importe quel type d'évolution, la fonction de transfert se limite aux grandeurs dont l'évolution est sinusoïdale dans le temps et pour lesquelles on peut définir une fréquence.

- *Paramètres*

Un système linéaire est caractérisé par certains paramètres, communs aux deux domaines, dont :

. un *gain statique K* qui caractérise le système en $f = 0$.

. une ou plusieurs *constantes de temps*, notées τ (en s), ou leurs inverses $\omega_O = 1/\tau$ appelées *pulsations propres* (ou encore $f_O = \omega_O/2\pi$ appelées *fréquences propres*)

- *Descriptions du système : équivalence équation différentielle ↔ fonction de transfert*

On a vu §A11 qu'à une dérivée dans le temps d'une variable sinusoïdale correspond une multiplication par $j\omega$ de sa représentation complexe dans le domaine fréquentiel. En utilisant la notation de Laplace, cela se résume de la façon suivante :

. domaine fréquentiel : la variable *p* correspond à la quantité $j\omega$ $\quad p\underline{v} = j\omega\underline{v}$

. domaine temporel : une multiplication par *p* correspond à une dérivée première $\quad pv = dv/dt$

Ces deux descriptions sont équivalentes.

Exemple (ce paragraphe peut être ignoré en 1ère lecture !) :

Soit un système électrique régi par une équation différentielle du 1er ordre liant sa tension d'entrée v_e et sa tension de sortie v_S, de la forme :

$$v_s + \tau_2 \frac{dv_s}{dt} = K\left(v_e + \tau_1 \frac{dv_e}{dt}\right)$$

En notation de Laplace, cette équation s'écrit aussi :

$$v_s + \tau_2 p v_s = K\left(v_e + \tau_1 p v_e\right)$$

Traduite dans le domaine fréquentiel (représentation complexe des grandeurs sinusoïdales) cette équation devient :

$$\underline{V}_s + \tau_2 p \underline{V}_s = K\left(\underline{V}_e + \tau_1 p \underline{V}_e\right)$$

Cela permet de faire apparaître le gain (complexe) en tension $\dfrac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$:

$$\frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = K\frac{1+\tau_1 p}{1+\tau_2 p}$$

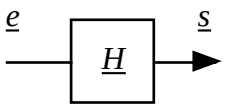
qui n'est autre que la fonction de transfert $\underline{H}$ du système :

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = K\frac{1+\tau_1 j\omega}{1+\tau_2 j\omega}$$

Ce calcul éq. diff → f. de transfert peut s'effectuer dans le sens inverse.

• ***Filtres***

La fonction de transfert harmonique $\underline{H}$ d'un système linéaire est telle que :



$$\underline{s} = \underline{H}.\underline{e} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |\underline{s}| = |\underline{H}|.|\underline{e}| \\ \mathrm{Arg}(\underline{s}) = \mathrm{Arg}(\underline{H}) + \mathrm{Arg}(\underline{e}) \end{cases}$$

où $\underline{e}$, $\underline{s}$, et $\underline{H}$ sont des fonctions complexes de la variable jω (ou j f).

$\underline{H}$ étant une fonction de la fréquence, un tel système est, par définition, un ***filtre.***

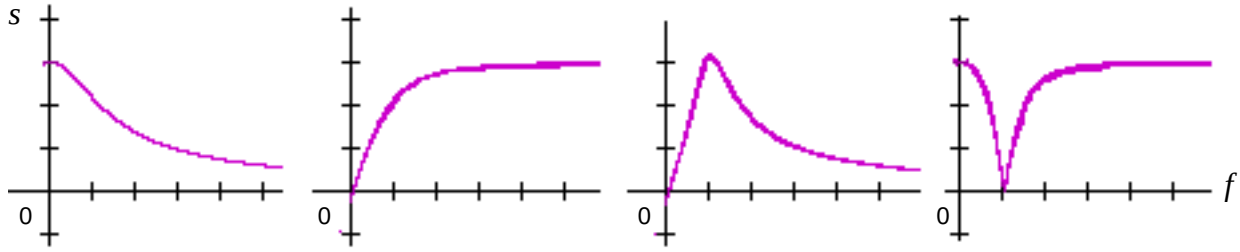
Ordre du filtre :

F. de transfert ou filtre du 1er ordre : $\underline{H} = f(c^{tes}, j\omega)$

F. de transfert ou filtre du 2ème ordre : $\underline{H} = f(c^{tes}, j\omega, (j\omega)^2)$

Etc...

Type du filtre :



Passe-Bas	Passe-Haut	Passe-Bande	Réjecteur
$s \xrightarrow[f\to\infty]{} 0$	$s \xrightarrow[f\to 0]{} 0$		

• ***Ecriture des fonctions de transfert***

Forme générale

La forme générale d'une fonction de transfert est un quotient de polynômes complexes :

1er ordre : $\underline{H}(j\omega) = K\dfrac{1+Aj\omega}{1+Bj\omega}$

2ème ordre : $\underline{H}(j\omega) = K\dfrac{1+A_1 j\omega + A_2(j\omega)^2}{1+B_1 j\omega + B_2(j\omega)^2}$

Variable réduite

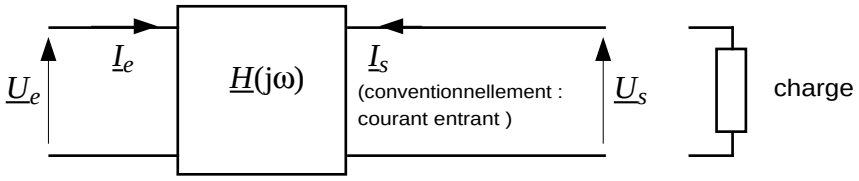
Afin d'alléger l'écriture des équations dans le domaine fréquentiel, il peut être utile de remplacer des termes incluant le (ou les) paramètre(s) du système, par exemple τω, par des *variables réduites*, sans dimension. Ainsi, le terme τω devient : $\tau\omega = \dfrac{\omega}{\omega_0} = \dfrac{f}{f_0} = x$ où x est la variable réduite.

Forme canonique

Une fonction de transfert peut s'écrire sous forme normalisée à l'aide d'un produit ou d'un quotient de termes standards qui sont les suivants :

Ordre	Variable simple $j\omega$	Variable réduite jx	Remarques
Ordre zéro		$\underline{K}$	constante réelle ou complexe
1er ordre	$j\tau\omega$ $1 + j\tau\omega$	jx $1 + jx$	terme du 1er ordre polynôme du 1er ordre
2ème ordre	$(j\tau\omega)^2$	$(jx)^2$ $1+2jmx+(jx)^2$	terme du 2ème ordre polynôme du 2ème ordre (m : amortissement) ⚠ la variable étant jx, on écrit de préférence $(jx)^2$ plutôt que $-x^2$
Ordres supérieurs			quotient ou produit de termes ou de polynômes du 1er et du 2ème ordre

• ***Cas particulier : quadripôles réactifs linéaires***



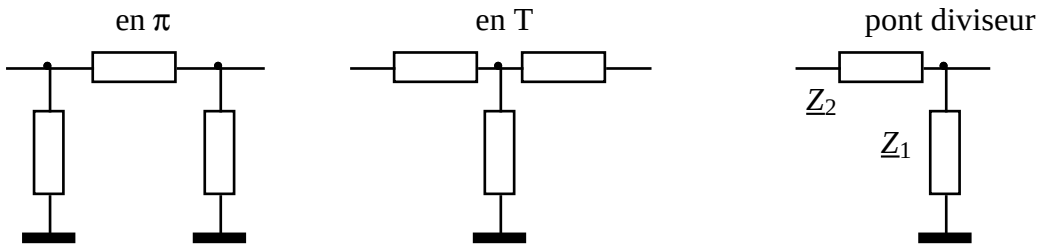
$\underline{U}_s = \underline{T} \cdot \underline{U}_e$	Fonction de transfert en tension	gain (linéaire) en tension	[sans dim.]
$\underline{I}_s = \underline{S} \cdot \underline{I}_e$	Fonction de transfert en courant	gain (linéaire) en courant	[sans dim.]
$\underline{U}_s = \underline{Z}_T \cdot \underline{I}_e$	Impédance de transfert	transimpédance	[Ω]
$\underline{I}_s = \underline{Y}_T \cdot \underline{U}_e$	Admittance de transfert	transadmittance	[S]

En général, l'expression des grandeurs $\underline{T}$, $\underline{S}$, $\underline{Z}_T$ et $\underline{Y}_T$ varie avec la charge (exemple : pont diviseur de tension fonctionnant en charge)

• ***Cas particulier : filtre passif***

C'est un quadripôle réactif qui ne contient que des éléments passifs (résistance, condensateur, bobine). Il ne contient pas d'éléments actifs (amplificateur, transistor, ...).

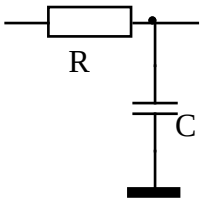
Structure du filtre :



• ***Cas particulier : pont diviseur de tension fonctionnant à vide***

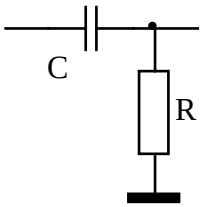
$$\underline{V}_s = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{V}_e \Leftrightarrow \underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Exemples de calculs de la fonction de transfert en tension :

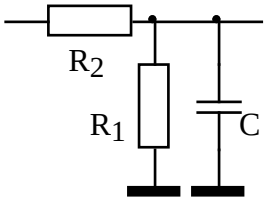


$$\underline{T} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$

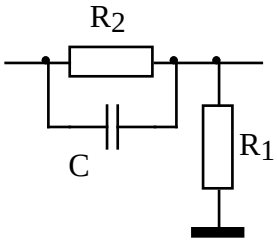
avec : $RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$



$$\underline{T} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\frac{f}{f_0}}{1 + j\frac{f}{f_0}}$$



$$\underline{T} = \frac{\frac{R_1}{1 + jR_1C\omega}}{R_2 + \frac{R_1}{1 + jR_1C\omega}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + jR_1R_2C\omega} = \frac{\frac{R_1}{R_1 + R_2}}{1 + j\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C\omega} = \frac{K}{1 + j\frac{f}{f_1}}$$



$$\underline{T} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}} = \frac{R_1 + jR_1R_2C\omega}{R_1 + R_2 + jR_1R_2C\omega} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1 + jR_2C\omega}{1 + j\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}C\omega}$$

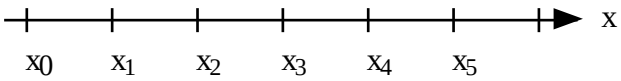
$$\Rightarrow \underline{T} = K.\frac{1 + j\frac{f}{f_2}}{1 + j\frac{f}{f_1}}$$

Plan de Bode

Une fonction de transfert étant complexe, ss représentation comprend deux graphes, l'un pour le module et l'autre pour la phase, en fonction de la fréquence. En outre, l'échelle des phénomènes rencontrés étant très grande, la représentation habituellement utilisée est logarithmique. Le plan de Bode est l'ensemble de ces deux graphes logarithmiques.

• *Échelles logarithmiques*

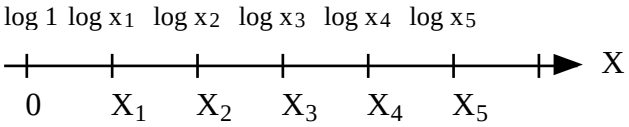
Axe linéaire :



unité : $\Delta x = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = c^{te}$

échelle : Δx = une unité de longueur (par ex. : Δx = 1 cm)

Axe logarithmique :



On pose : X = log x

unité : $\Delta X = X_1 - 0 = X_2 - X_1 = X_3 - X_2 = ... = c^{te}$

$\Rightarrow \Delta X = \log x_2 - \log x_1 = \log x_3 - \log x_2 = ... = c^{te}$

$\Rightarrow \Delta X = \log (x_2 / x_1) = \log (x_3 / x_2) = ... = c^{te}$

rapport : $\Delta X = \log r$

r = 2 : une octave

r = 10 : une décade

échelle : r = 10 $\Rightarrow \Delta X = \log 10$ = une unité de longueur

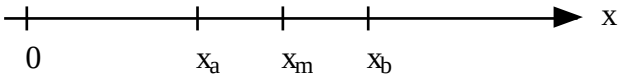
r = 2 $\Rightarrow \Delta X = \log 2 = 0{,}3$ unité de longueur

Sur une échelle logarithmique, la longueur (en cm) d'une octave est donc égale à 0,3 fois la longueur d'une décade. Réciproquement, la longueur d'une décade est égale à 1/0,3 ≈ 3,3 fois la longueur d'une octave (⚠ et NON pas : 1 décade = 5 octaves !)

Milieu d'un segment :

- axe linéaire :

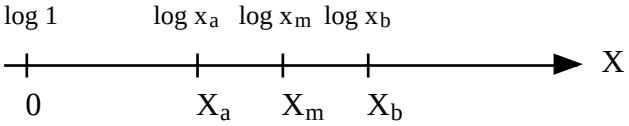
$$x_m - x_a = x_b - x_m$$



$$\Rightarrow x_m = \frac{x_a + x_b}{2} \quad \text{(moyenne arithmétique)}$$

- axe logarithmique :

$$X_m - X_a = X_b - X_m$$



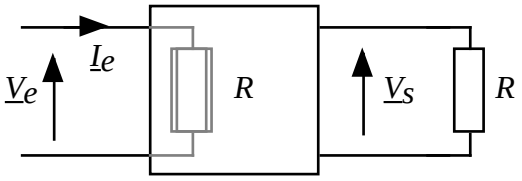
$$\Rightarrow X_m = \frac{X_a + X_b}{2}$$

$$\Rightarrow \log x_m = \frac{\log x_a + \log x_b}{2} = \log \sqrt{x_a x_b}$$

$$\Rightarrow x_m = \sqrt{x_a x_b} \quad \text{(moyenne géométrique)}$$

• *Décibels*

On considère un quadripôle dont l'impédance d'entrée $\underline{Z}_e = \underline{V}_e / \underline{I}_e = R$ est réelle. On suppose que ce quadripôle est chargé par une résistance R. Soit :



P_s : puissance fournie à la charge

P_e : puissance consommée à l'entrée du quadripôle

On définit le gain en puissance mesuré en échelle linéaire : $A = P_s / P_e$

On définit de même le gain en puissance mesuré en échelle logarithmique : $G = \log A$

Définition : pour $P_s = 10\ P_e$, on calcule : $G = \log 10 = 1$ Bel = 10 déciBels (dB).

D'où : $G_{\text{dB}} = 10 \log \dfrac{P_s}{P_e}$

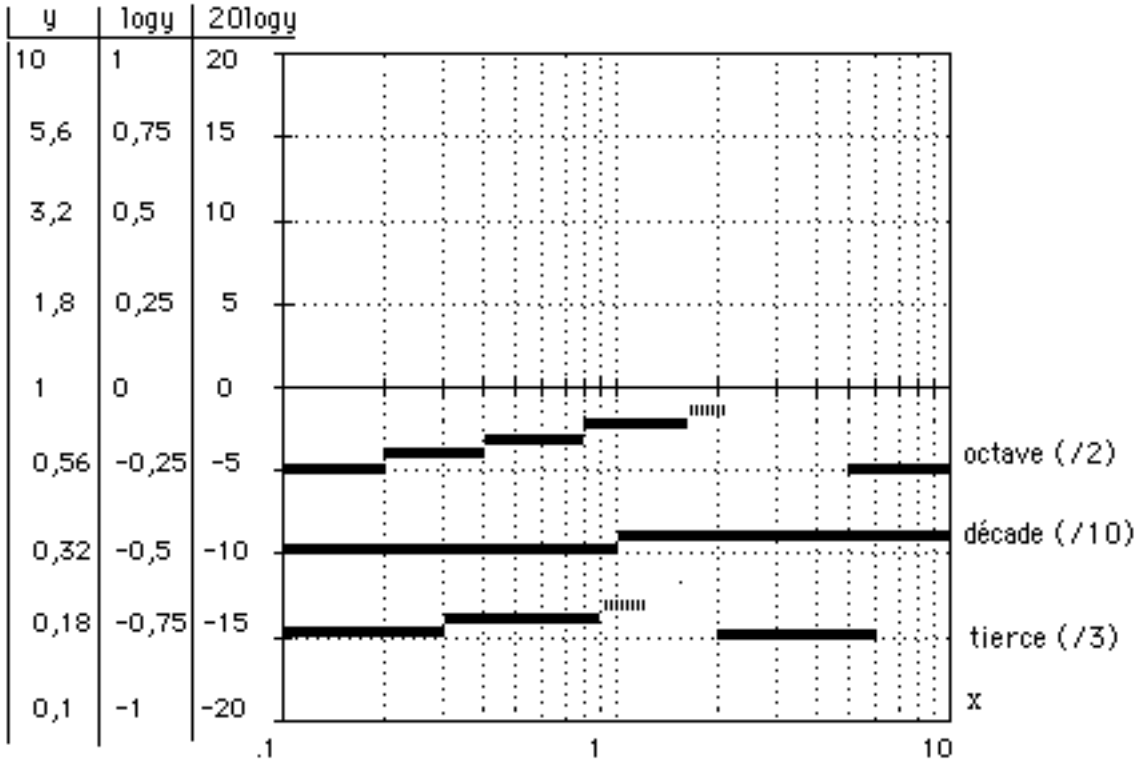
Or, d'après les données précédentes : $P_e = V_e^2 / R$ et $P_s = V_s^2 / R \Rightarrow P_s / P_e = (V_s / V_e)^2$.

D'où : $G_{\text{dB}} = 20 \log \dfrac{V_s}{V_e}$

• *Plan de Bode*

De $\underline{V}_s = \underline{T}.\ \underline{V}_e$ on tire une double relation : $\begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log \left|\underline{T}\right| = 20 \log \dfrac{V_s}{V_e} \\ \text{Arg}(\underline{T}) = \text{Arg}(\underline{V}_s) - \text{Arg}(\underline{V}_e) \end{cases}$

Ce qui entraîne une double représentation, en gain (exprimé en dB), et en phase (exprimée généralement en degrés). Les axes des ordonnées sont linéaires (dB ou °). L'axe des abscisses est logarithmique, gradué en pulsation (rad/s) ou en fréquence (Hz). On donne ci-dessous une représentation y(x) dans ce plan (NB : les musciens connaissent aussi la tierce !) :



Remarque :

$G = 20\log(|\underline{T}|) \quad \Rightarrow \quad G < 0$ si $0 < |\underline{T}| < 1$; $G \to -\infty$ si $|\underline{T}| \to 0$

$G = 0$ si $|\underline{T}| = 1$

$G > 0$ si $|\underline{T}| > 1$; $G \to +\infty$ si $|\underline{T}| \to +\infty$

• *Plan de Bode : propriété d'additivité*

Supposons que la fonction de transfert $\underline{T}$ soit décomposable en un produit de deux fonctions élémentaires : $\underline{T} = \underline{T}_1 \,.\, \underline{T}_2$

Cette équation, qui porte sur des nombres complexes, se ramène à deux équations réelles :

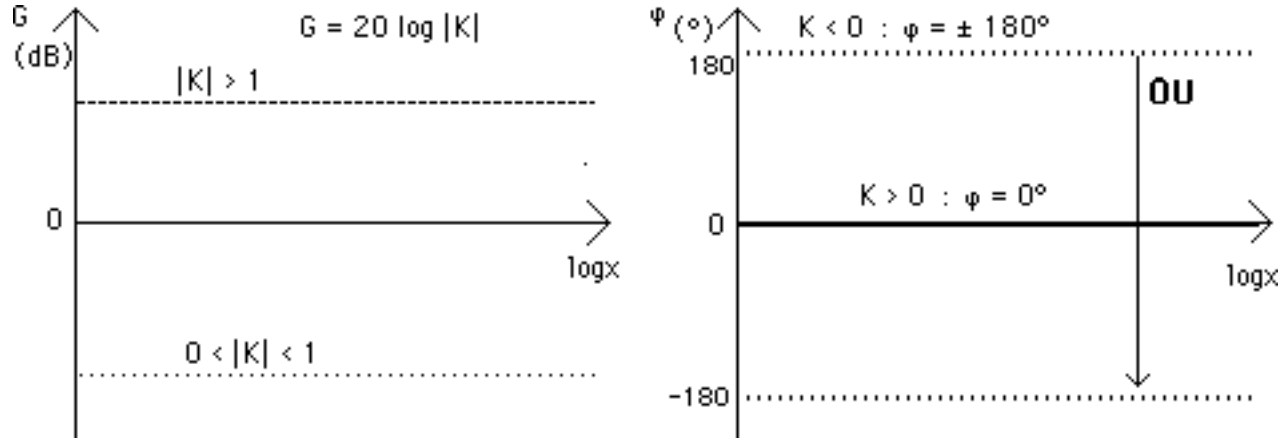
$|\underline{T}| = |\underline{T}_1| \,.\, |\underline{T}_2| \quad \Rightarrow \quad G = G_1 + G_2$

$\mathrm{Arg}(\underline{T}) = \mathrm{Arg}(\underline{T}_1) + \mathrm{Arg}(\underline{T}_2) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

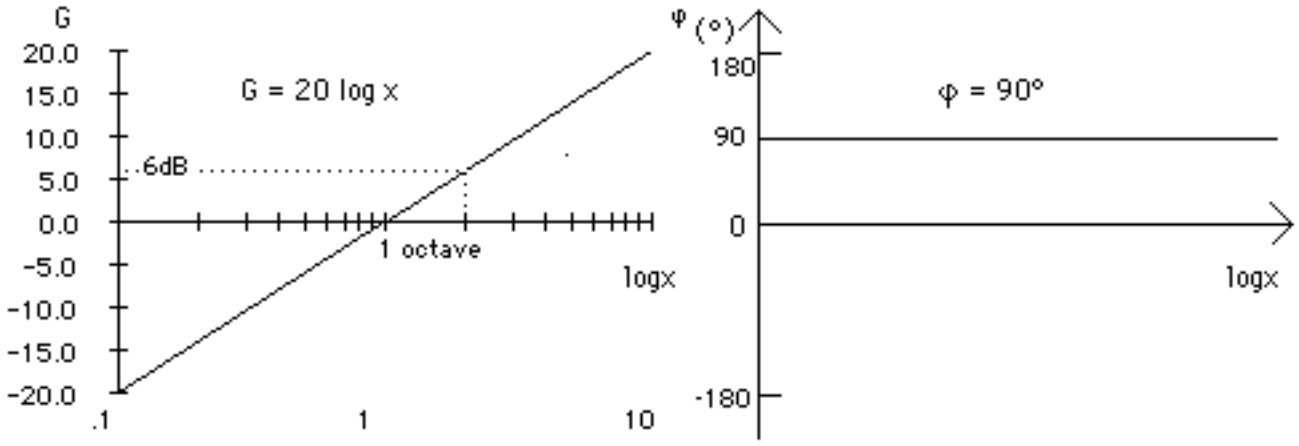
La représentation dans le plan de Bode utilise des grandeurs additives, puisque les modules des fonctions de transfert sont exprimés en décibels : $G_1 = 20\log|\underline{T}_1|$ et $G_2 = 20\log|\underline{T}_2|$.

• *Représentation des termes normalisés dans le plan de Bode*

$\underline{T} = K$ (supposé réel)



$\underline{T} = \mathrm{j}x$



Pente 6dB/octave, car :

$x_2 = 2x_1 \Rightarrow G_2 = 20\log x_2 = 20\log 2 + 20\log x_1 = 6 + G_1$

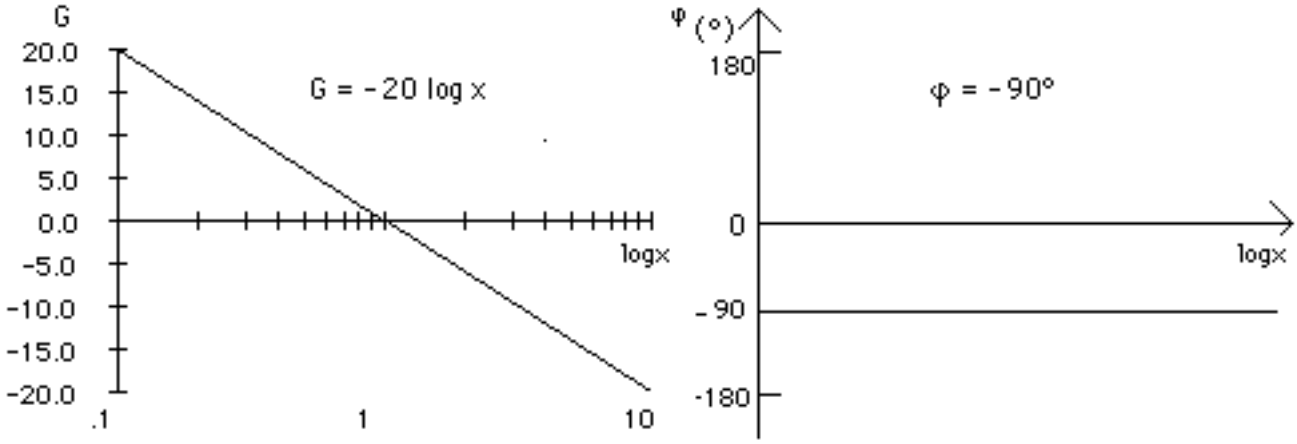
$\underline{T} = \mathrm{j}x = x\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}$

$\Rightarrow \varphi = \mathrm{cte} = \pi/2 = 90°$

Ou pente 20dB/décade, car :

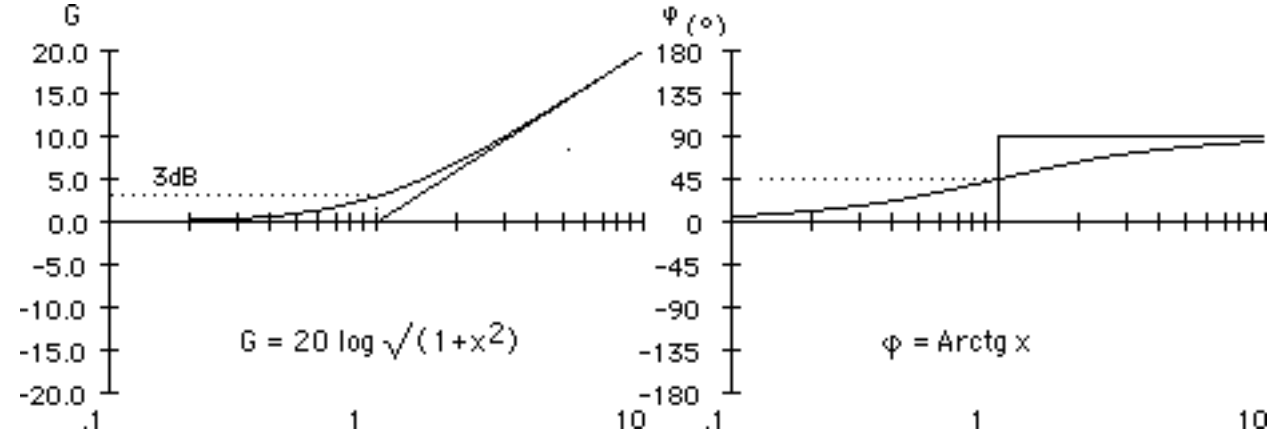
$x_2 = 10x_1 \Rightarrow G_2 = 20\log 10 + 20\log x_1 = 20 + G_2$

$\underline{T}$ = 1/j*x*



Pente –6dB/octave ou –20dB/décade $\underline{T} = 1/jx = x\,e^{-j\pi/2} \Rightarrow \varphi = c^{te} = -\pi/2 = -90°$

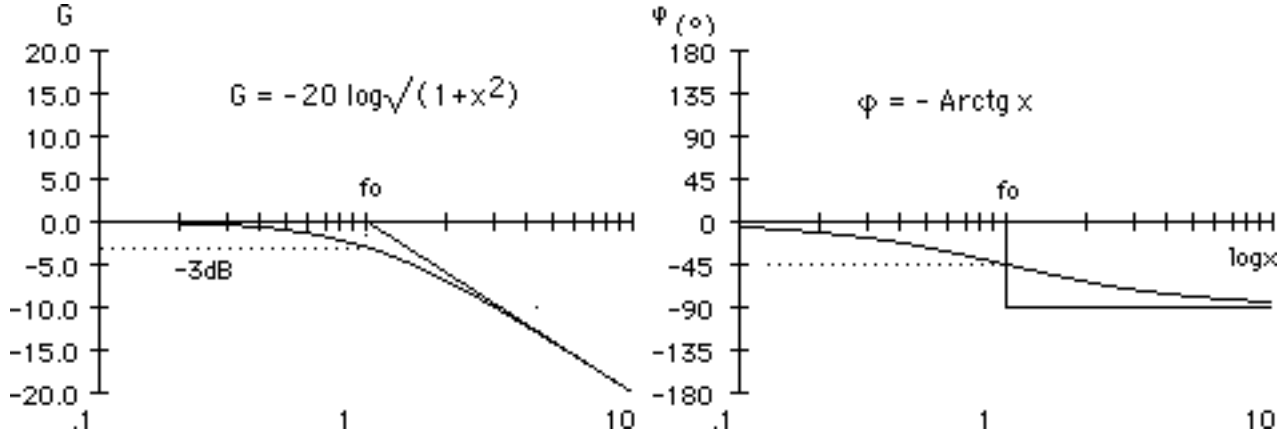
$\underline{T}$ = 1 + j*x*



Asymptotes :

$x \to 0$	$\underline{T} \approx 1$	$G \to 0$dB	$\varphi \to 0°$
$x \to \infty$	$\underline{T} \approx jx$	$G \to 20\log x$	$\varphi \to 90°$

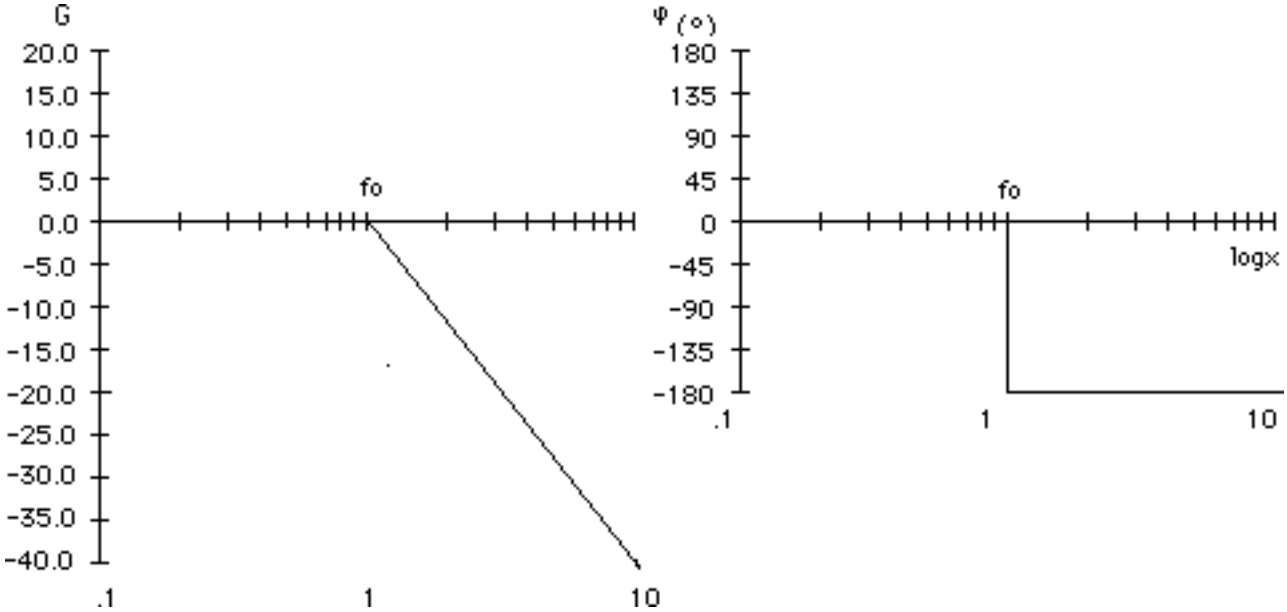
$\underline{T}$ = 1 / (1 + j*x*)



Asymptotes :

$x \to 0$	$\underline{T} \approx 1$	$G \to 0$dB	$\varphi \to 0°$
$x \to \infty$	$\underline{T} \approx 1/jx$	$G \to -20\log x$	$\varphi \to -90°$

$\underline{T} = 1 / [\ 1 + 2jmx + (jx)^2\ ]$



Asymptotes (la forme exacte des courbes dépend du paramètre m : cf plus bas l'étude complète)

$x \to 0$	$\underline{T} \approx 1$	$G \to 0$dB	$\varphi \to 0°$
$x \to \infty$	$\underline{T} \approx 1/(jx)^2$	$G \to -40\log x$	$\varphi \to -180°$

Généralisation : termes d'ordre supérieur en $\mathbf{(jx)^n}$

A un terme en $(jx)^n$, avec n positif ou négatif, correspond une asymptote de pente $6n$ dB/octave ou $20n$ dB/décade, ainsi qu'un déphasage de $n\pi/2$.

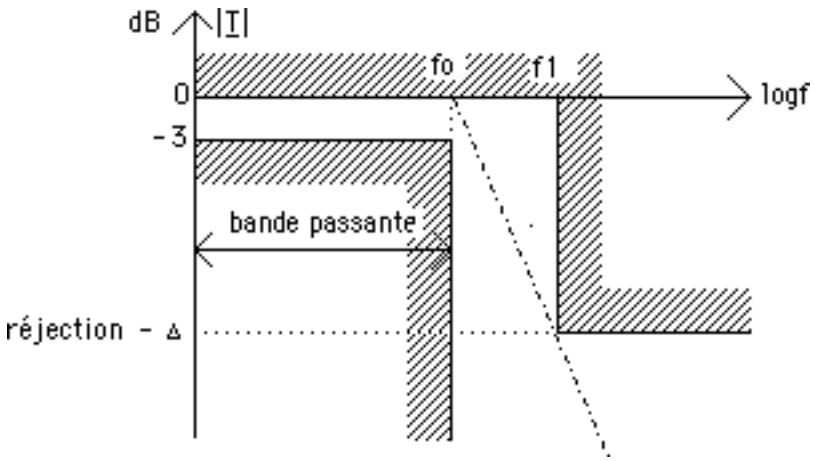
• *Gabarit d'un filtre passe-bas*

L'utilisateur définit le plus souvent ses besoins en terme d'amplitude (gain). Une infinité de fonctions de transfert $\underline{T}(j\omega)$ peuvent satisfaire aux conditions imposées. Il suffit que la courbe $|\underline{T}(j\omega)|$ passe par des tracés limites que l'on appelle le *gabarit* du filtre, qui en est en quelque sorte le «cahier des charges». Le gabarit d'un filtre passe-bas est tel que :

-pour $f < f_0$, atténuation comprise entre 0 et $-\varepsilon$ dB (en général, –1ou –3 dB). Cette gamme de fréquence est appelée *bande passante* du filtre.

-pour $f > f_1$, atténuation ou *réjection* > Δ dB

Ces conditions sont satisfaites si la courbe passe dans la région non hachurée du plan :



On peut calculer une valeur approchée de l'ordre du filtre à partir des données du gabarit d'après l''asymptote qui passe par $-\Delta$ dB en $f = f_1$ et qui a pour équation :

$G = -20\, n \log (f / f_0)$ où n est l'ordre du filtre.

Il vient, pour $G = -\Delta$ en $f = f_1$:

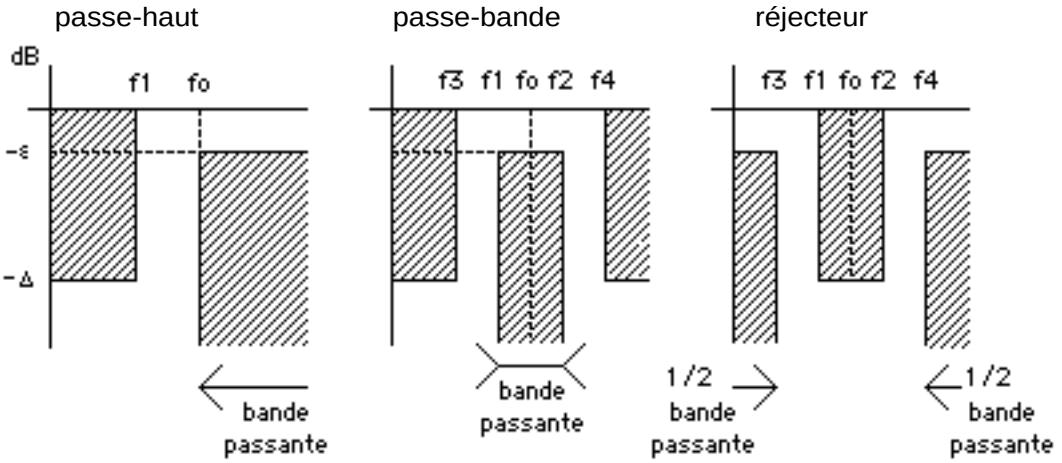
$n = \Delta / 20 \log (f_1 / f_0)$

L'ordre du filtre étant nécessairement entier, il faut arrondir ce résultat par valeur supérieure :

$$n = \left\lceil \frac{\Delta}{20 \log \frac{f_1}{f_0}} \right\rceil$$

(bien entendu, n peut être supérieur à 2)

• ***Gabarit de filtres passe-haut, passe-bande et réjecteur***



ε est l'atténuation maximale dans la bande passante.

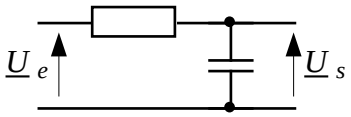
Δ est la réjection minimale exigée dans une certaine gamme de fréquence.

f_0 est la fréquence de coupure (passe-bas, passe-haut) ou la fréquence centrale (passe-bande, réjecteur). Dans le cas des filtres passe-bande et réjecteur, on a : $f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{f_3 f_4}$ si le gabarit est symétrique par rapport à f_0.

Circuits du 1er ordre

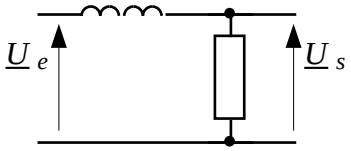
• *Filtre Passe-Bas*

- *Cellule RC* $\tau = RC$

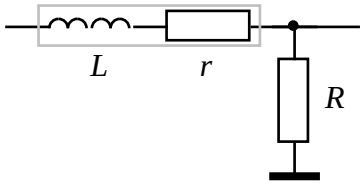


Une telle cellule n'est pas nécessairement réalisée en composants discrets. Par exemple, l'adjonction d'un condensateur à la sortie d'une dynamo tachymétrique réalise ce circuit grâce à la résistance interne de la dynamo.

- *Cellule LR* $\tau = \dfrac{L}{R}$



La bobine est en général résistive. Le schéma réel de la cellule correspond donc au circuit ci-contre, dont les propiétés diffèrent du circuit idéal. C'est pourquoi ce schéma est peu utilisé en pratique.



- *Fonction de transfert*

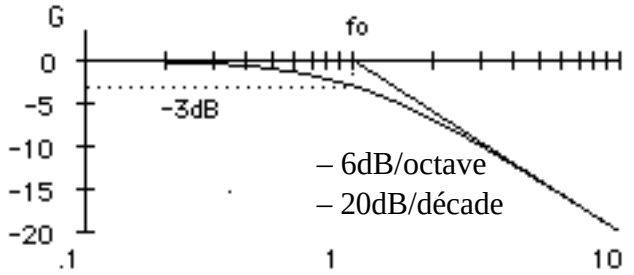
$$\underline{T} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\tau\omega} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}} = \frac{1}{1+\tau p}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}\ ;\ f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$$

- *Module* $|\underline{T}| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}}$ $\qquad |\underline{T}(f_0)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7 \approx 70\%$

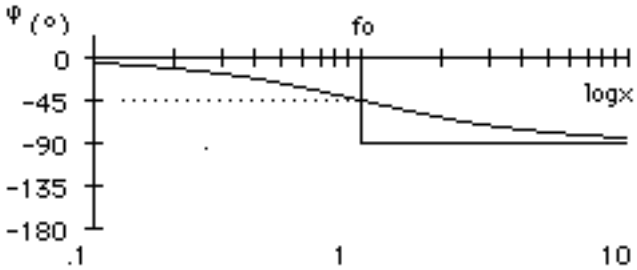
- *Gain* $G = 20\log|\underline{T}|$

$G(f_0) = -3$ dB



- *Phase* $\mathrm{Arg}(\underline{T}) = -\arctan\left(\dfrac{f}{f_0}\right)$

$\mathrm{Arg}\left(\underline{T}(f_0)\right) = -\dfrac{\pi}{4}$

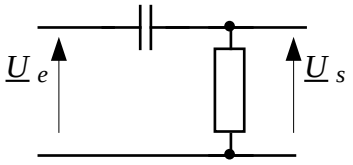


- *Valeurs numériques :*

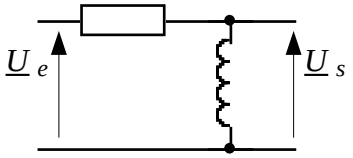
	fo/10	fo/8	fo/4	fo/2	fo	2fo	4fo	8fo	10fo
x	0,01	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	10
|T|	1,000	0,992	0,970	0,894	0,707	0,447	0,243	0,124	0,100
G (dB)	-0,0	-0,1	-0,3	-1,0	-3,0	-7,0	-12,3	-18,1	-20,0
φ (°)	-1	-7	-14	-27	-45	-63	-76	-83	-84

• *Filtre Passe-Haut*

- *Cellule CR* $\tau = RC$



- *Cellule RL* $\tau = \dfrac{L}{R}$



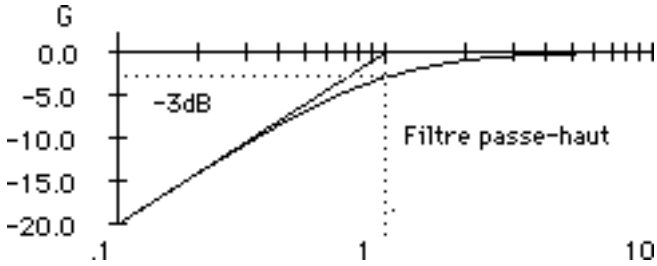
- *Fonction de transfert*

$$\underline{T} = \frac{j\tau\omega}{1+j\tau\omega} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{j\dfrac{f}{f_0}}{1+j\dfrac{f}{f_0}} = \frac{\tau p}{1+\tau p}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\tau}\ ;\ f_0 = \frac{1}{2\pi\tau}$$

- *Module* $|\underline{T}| = \dfrac{\dfrac{f}{f_0}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}}$ $\qquad |\underline{T}(f_0)| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7 \approx 70\%$

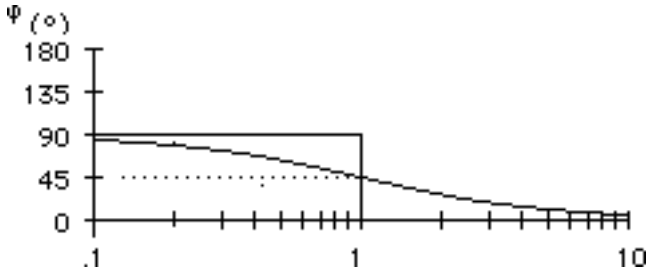
- *Gain* $G = 20\log|\underline{T}|$



- *Phase*

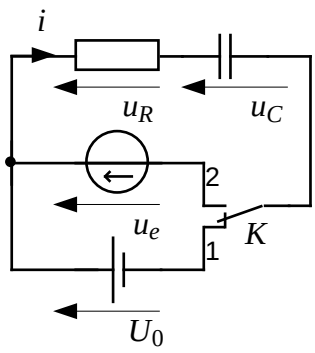
$$\mathrm{Arg}(\underline{T}) = -\arctan\left(\frac{f}{f_0}\right) + \frac{\pi}{2}$$

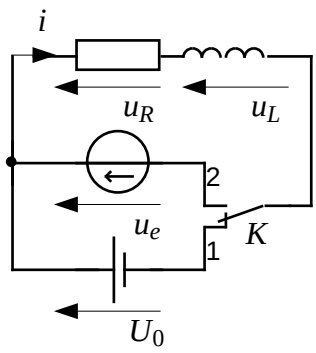
$$\mathrm{Arg}\left(\underline{T}(f_0)\right) = +\frac{\pi}{4}$$



La construction de ces courbes s'effectue en considérant que : $\underline{T} = \underline{T}_1.\underline{T}_2$ avec : $\underline{T}_1 = jx$ et $\underline{T}_2 = 1/(1+jx)$. Les gains et les phases de ces deux fonctions de transfert s'additionnent.

• *Régime transitoire d'un circuit du 1er ordre*





- *Scénario*

Dans ces circuits, on suppose que le commutateur K est en position 1 (contact repos) depuis longtemps. La tension U_0 est constante. A l'instant $t = 0$, K passe en position 2 (contact travail).

On cherche à déterminer l'évolution de l'état du circuit par la méthode de résolution des équations différentielles du 1er ordre (cf cours de maths).

- *Équation différentielle*

loi des mailles : $u_e = Ri + u_C$
condensateur : $i = C\dfrac{du_C}{dt}$

$$\Rightarrow u_e = RC\frac{du_C}{dt} + u_C$$

loi des mailles : $u_e = Ri + u_L$
bobine : $u_L = L\dfrac{di}{dt}$

$$\Rightarrow u_e = Ri + L\frac{di}{dt}$$

NB : il est important de soigner l'écriture de l'équation, afin de la présenter sous une forme standard plus facile à résoudre :

- séparer les variables, en réunissant dans le second membre (à droite du signe =) les grandeurs connues (tension d'entrée u_e) qui sont des *données* ; et dans le premier membre les grandeurs à déterminer (en commençant par le terme différentiel).
- faire apparaître la *constante de temps :*

$$\tau = RC \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

D'où :

$$\tau\frac{du_C}{dt} + u_C = u_e \qquad \frac{L}{R}\frac{di}{dt} + i = \frac{u_e}{R} \qquad \tau\frac{di}{dt} + i = \frac{u_e}{R}$$

L'évolution des autres paramètres de ces circuits se déduit facilement à partir de la loi des mailles :

$$u_R = u_e - u_C \qquad u_R = Ri$$

$$i = \frac{u_R}{R} \qquad u_L = u_e - u_R$$

- *Condition initiale*

C'est l'état du circuit au moment où l'on agit sur K. On note 0^+ cet instant, pour signifier qu'il s'agit du premier milliardième de seconde (?!) après cette action...

$$u_C(0^+) = U_0 \qquad\qquad i(0^+) = \frac{U_0}{R}$$

- Régime permanent

Comme son nom l'indique, le régime transitoire ne dure pas. Au bout d'un temps suffisamment long (≈ une dizaine de fois la constante de temps), le circuit obéira aux lois habituelles de l'électricité que l'on connaît en régime établi (continu, alternatif, etc).

• Réponse d'un circuit du 1er ordre à un échelon de tension

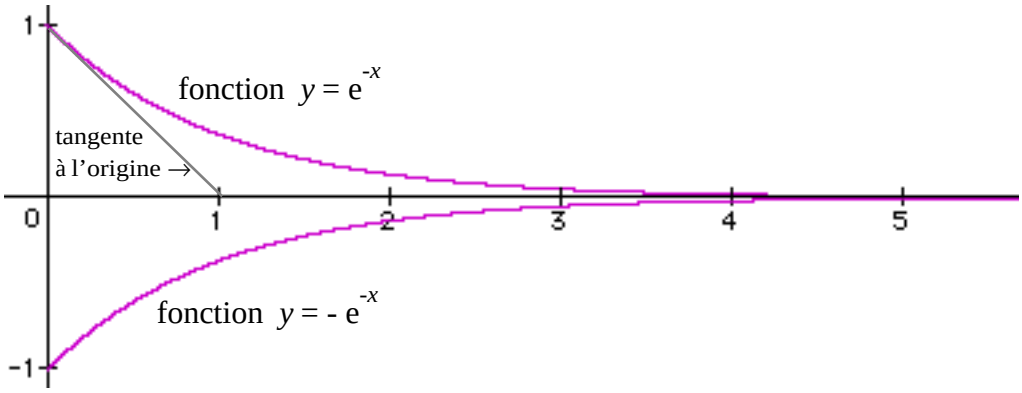
Hyp. : la tension u_e est constante. Soit E sa valeur. L'action sur K (positions 1 → 2) permet de soumettre le circuit à une variation instantanée de tension ($U_0 \rightarrow E$), appelée *échelon* de tension.

Comme les deux circuits sont décrits par des équations de même forme, on se limite ici au cas du circuit RC.

- Résolution de l'équation différentielle

1°) Régime transitoire, solution générale de l'équation sans second membre

$$\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Rightarrow u_C(t) = K.e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad (K : \text{c}^{\text{te}} \text{ d'intégration})$$



2°) Régime permanent, solution particulière de l'équation complète calculée à l'aide des lois sur les réseaux électriques. Ici, au bout d'un temps suffisamment long (théoriquement infini), le condensateur sera chargé sous la tension E.

$u_C(\infty) = E$

3°) La solution complète s'écrit :

$$u_C(t) = \underbrace{K.e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{régime transitoire}} + \underbrace{E}_{\text{régime permanent}}$$

4°) Application de la condition initiale à la solution complète :

à $t = 0$, $u_C(0) = U_0 \Rightarrow U_0 = K.e^0 + E \Rightarrow K = U_0 - E$ ⚠ NB : si $E > U_0$ (charge), $K < 0$

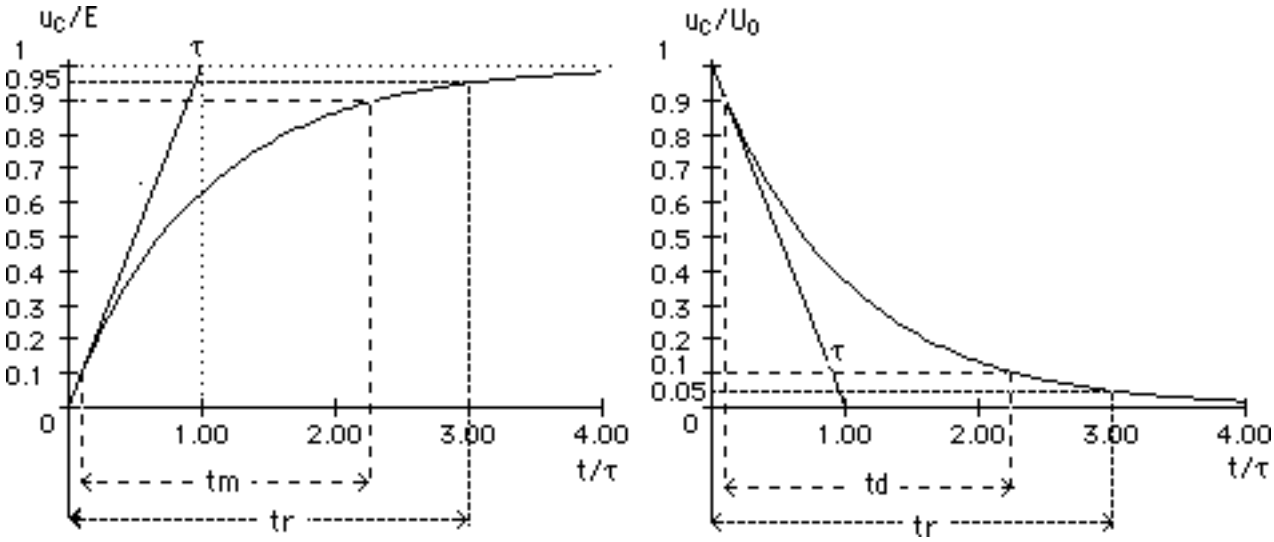
5°) Conclusion : solution définitive :

$$u_C(t) = (U_0 - E)\, e^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

- Graphes : exemples :

Charge d'un condensateur
Soit : $U_0 = 0$

Décharge d'un condensateur
Soit : $E = 0$



Ces courbes, normalisées en abscisse (axe gradué en t/τ) et en ordonnée, sont les graphes des équations suivantes :

$$u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad\qquad u_C(t) = U_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Ces grqphes possèdent un certain nombre de caractéristiques :

- asymptotes :

  $t \to \infty \;\Rightarrow\; u_C \to E$ $\qquad$ $t \to \infty \;\Rightarrow\; u_C \to 0$

- tangente à l'origine : coupe l'asymptote en $t = \tau$.
- temps de montée, de descente : défini entre 10% et 90% de la valeur asymptotique :

  $t_m \approx 2{,}2\,\tau$ $\qquad$ $t_d \approx 2{,}2\,\tau$

- temps de réponse (ou rapidité) : défini entre 0 et 95% de la valeur asymptotique :

  $t_r \approx 3\,\tau$

- constante de temps :

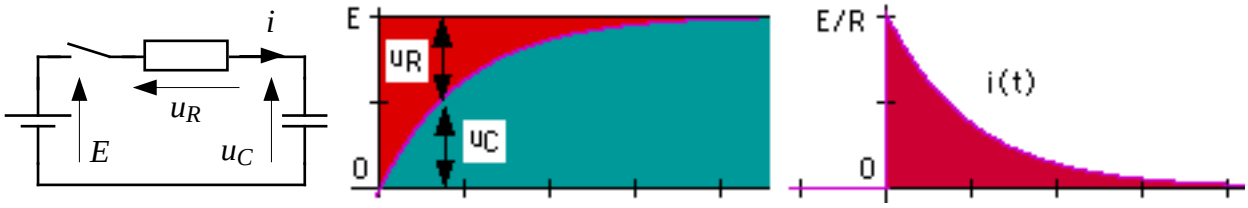
  à t = τ, u_C atteint 63% de sa valeur finale.

- erreur (différence | u_C – asymptote | exprimée en %), cas de la charge :

t/tau	0	0,5	1	1,5	2	3	5	7,5	10
Uc/E	1	6,1e-1	3,7e-1	2,2e-1	1,4e-1	4,9e-2	6,7e-3	5,5e-4	4,5e-5
erreur %	100	61	37	22	14	5	0,674	0,055	0,005

- *Courant*

Exemple avec $u_e = E$; $U_0 = 0$: on déduit $i(t)$ de $u_e = u_R + u_C \Rightarrow i = \dfrac{u_e - u_C}{R} = \dfrac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$.



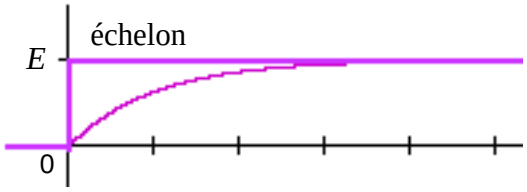
• *Allure de la réponse du circuit à quelques signaux typiques*

Principe : on suppose que, pour $t < 0$, la tension u_e appliquée au circuit est toujours nulle. A partir de l'instant $t = 0^+$, on applique un signal $u_e \neq 0$. Quel que soit u_e, la réponse est toujours de la

forme : $u_C(t) = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + \text{régime permanent}$.

- *réponse indicielle*

C'est la réponse à un échelon (voir ci-dessus) :



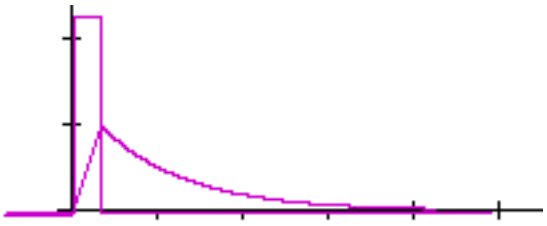
$$u_C(t) = -E\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

ÉQUATION GÉNÉRALE D'UN ARC D'EXPONENTIELLE : $\boxed{y(t) = (y_0 - y_\infty)\; e^{-\frac{t}{\tau}} + y_\infty}$

avec : $y_0 = y_{t=0}$ *et* $y_\infty = y_{t\to\infty}$

- *réponse impulsionnelle*

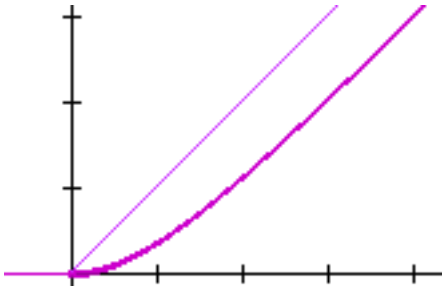
C'est la réponse à une impulsion brève. Le condensateur se charge pendant l'impulsion, puis se décharge. En négligeant la durée de l'impulsion, la réponse est exponentielle décroissante. Le régime permanent est nul.



$$u_C = K.\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

- *réponse à une rampe*

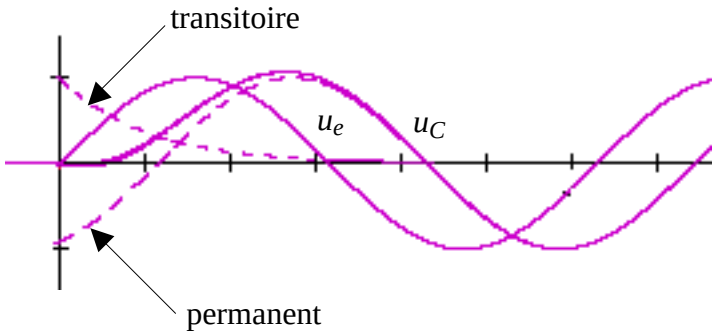
C'est la réponse à un signal de la forme : $u_e = at$



$$u_C = K.\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + at + b$$

- *régime transitoire d'un circuit alimenté en courant alternatif*

En régime permanent, la tension u_C vaut : $\underline{U}_C = \underline{T}\;\underline{U}_e$. Si $u_e = U_0 \sin \omega t$, alors *:*



$$u_C = K\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} + |\underline{T}|\,U_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

avec :

$$|\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

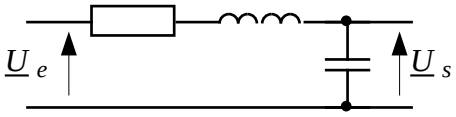
$$\varphi = -\arctan \tau\omega$$

Circuits du 2ème ordre : FORMULAIRE

pour un exposé détaillé, voir cours de régulation

• *Filtre Passe-Bas (ou fonction de transfert principale du second ordre)*

- *Cellule RLC*



- *Fonction de transfert*

$$\underline{T} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega + (\mathrm{j}\omega)^2 LC} = \frac{1}{1 + 2\,\mathrm{j}m\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,;\ f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\,;\ T_0 = 2\pi\sqrt{LC}\,;\ m = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$$

- *Module*

$$|\underline{T}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + \left(2m\dfrac{f}{f_0}\right)^2}}$$

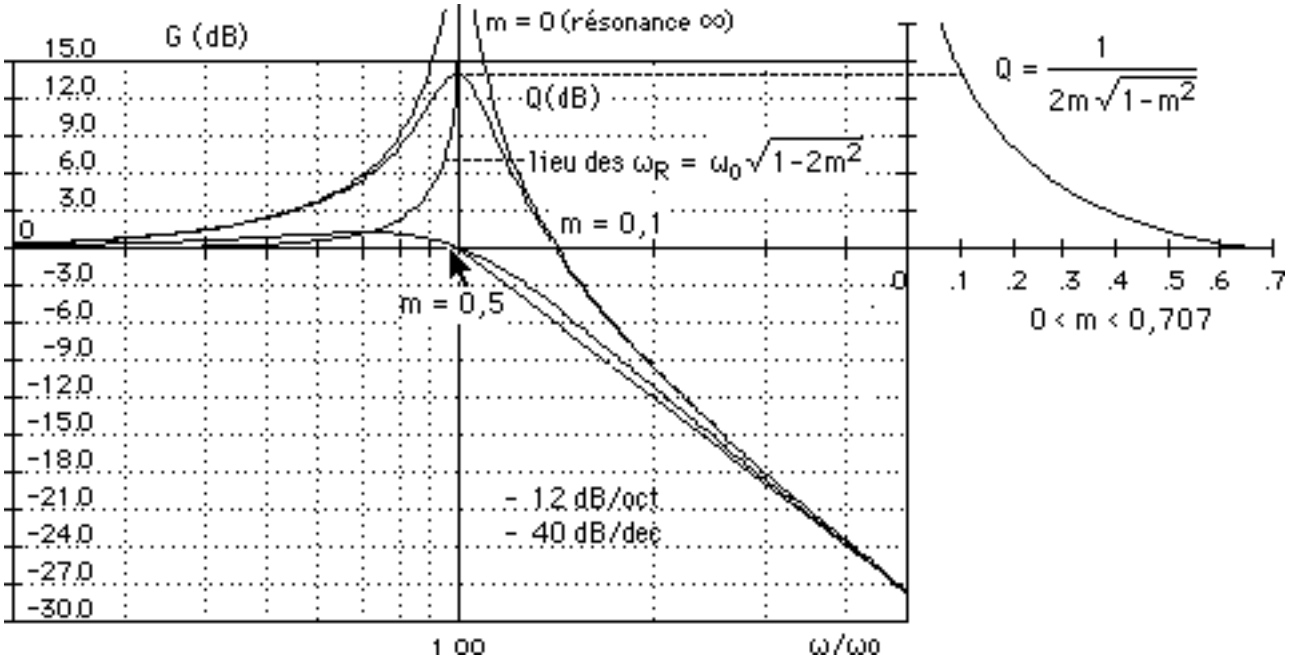
$$|\underline{T}(f_0)| = \frac{1}{2m}$$

- *Gain*

$$G = 20\log|\underline{T}|$$

La courbe de gain dépend du facteur *m*. Contrairement aux filtres du 1er ordre, la fréquence de coupure f_c définie pour $G = -3$ dB est différente de la fréquence propre f_0.

$0 < m \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Il existe un phénomène de résonance d'amplitude Q pour la pulsation ω_R.

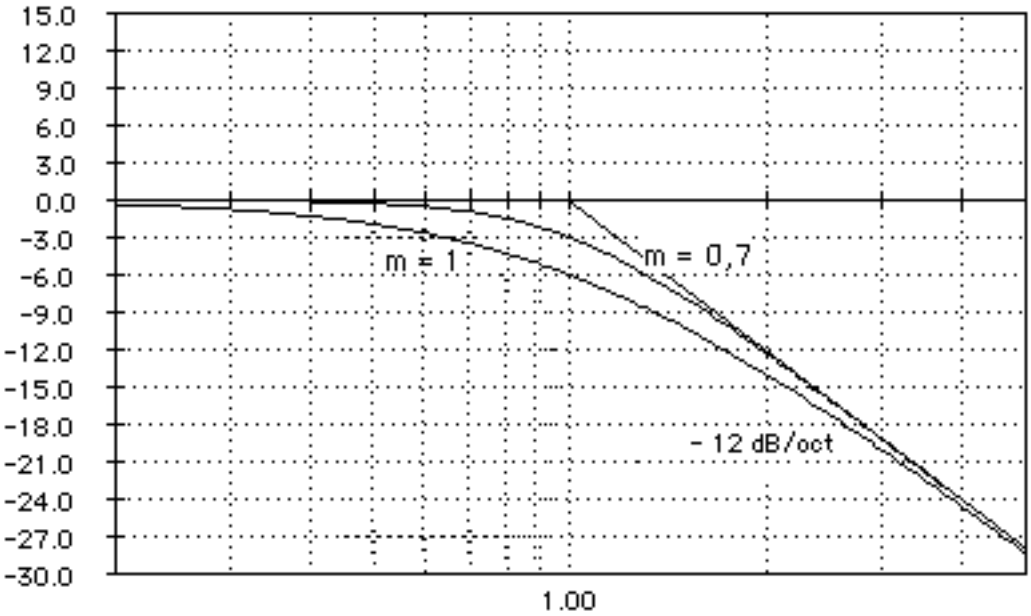


$m \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Il n'y a plus de phénomène de résonance

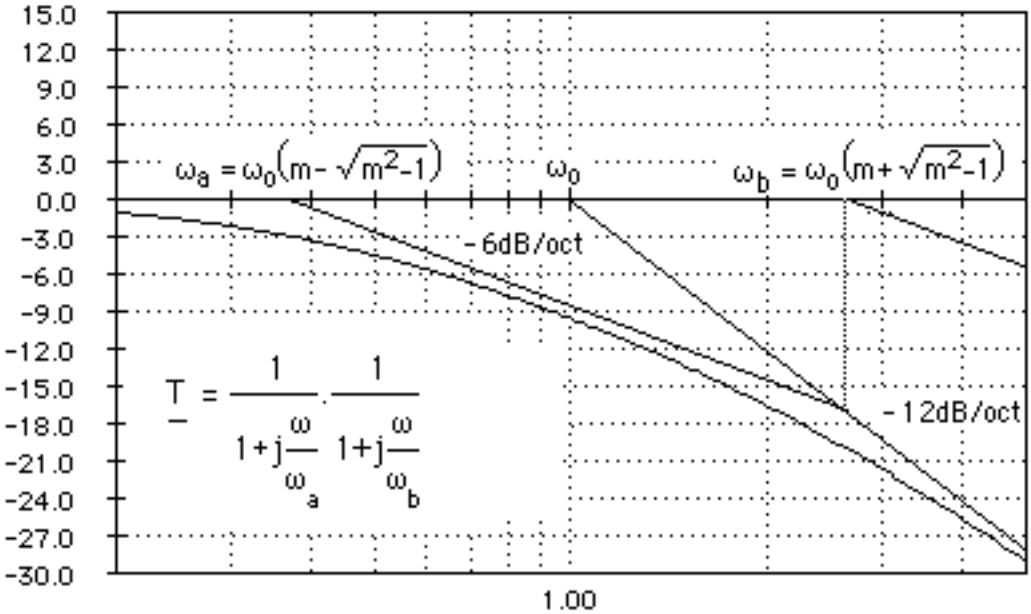
$m = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$ $\quad |\underline{T}| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^4}} \Rightarrow G(f_0) = -3\,\text{dB} \Leftrightarrow f_c \equiv f_0$

Réponse la plus plate possible dans la bande passante : $|\Delta G| < 3$dB sur $[0,\omega_0]$.

$m = 1$ La fonction de transfert est un carré parfait : $\underline{T} = \dfrac{1}{\left(1+\mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}\right)^2}$



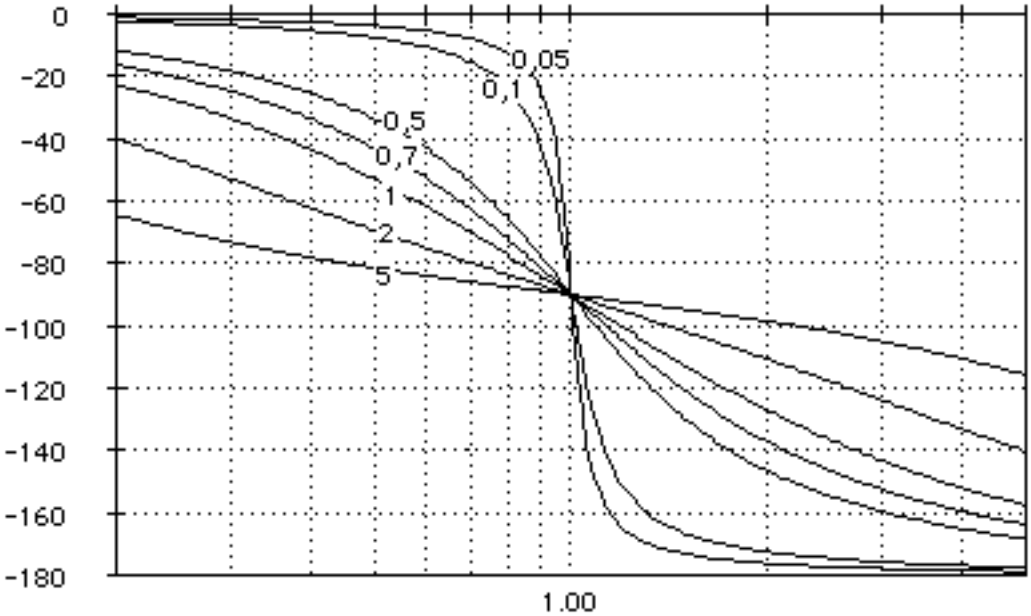
$m > 1$ La fonction est décomposable en un produit de deux fonctions du 1er ordre.
exemple : $m = 1{,}5$:



- *Phase* $\text{Arg}(\underline{T}) = -\arctan \dfrac{2m\dfrac{f}{f_0}}{1-\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}$ $\quad \text{Arg}\left(\underline{T}(f_0)\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

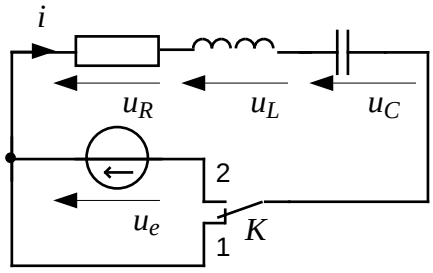
$\text{Arg}\left(\underline{T}\right) \xrightarrow[f\to\infty]{} -\pi$

La courbe de phase dépend de m :



• ***Régime transitoire d'un circuit du 2ème ordre à un échelon de tension***

A $t = 0$, on suppose que le condensateur est initialement déchargé : $u_C(0) = 0$; et le circuit au repos : $i(0) = 0$



- *Équation différentielle*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{loi des mailles :} & u_e = Ri + u_C + u_L \\ \text{condensateur :} & i = C\dfrac{du_C}{dt} \\ \text{bobine :} & u_L = L\dfrac{di}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow u_e = RC\frac{du_C}{dt} + u_C + LC\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

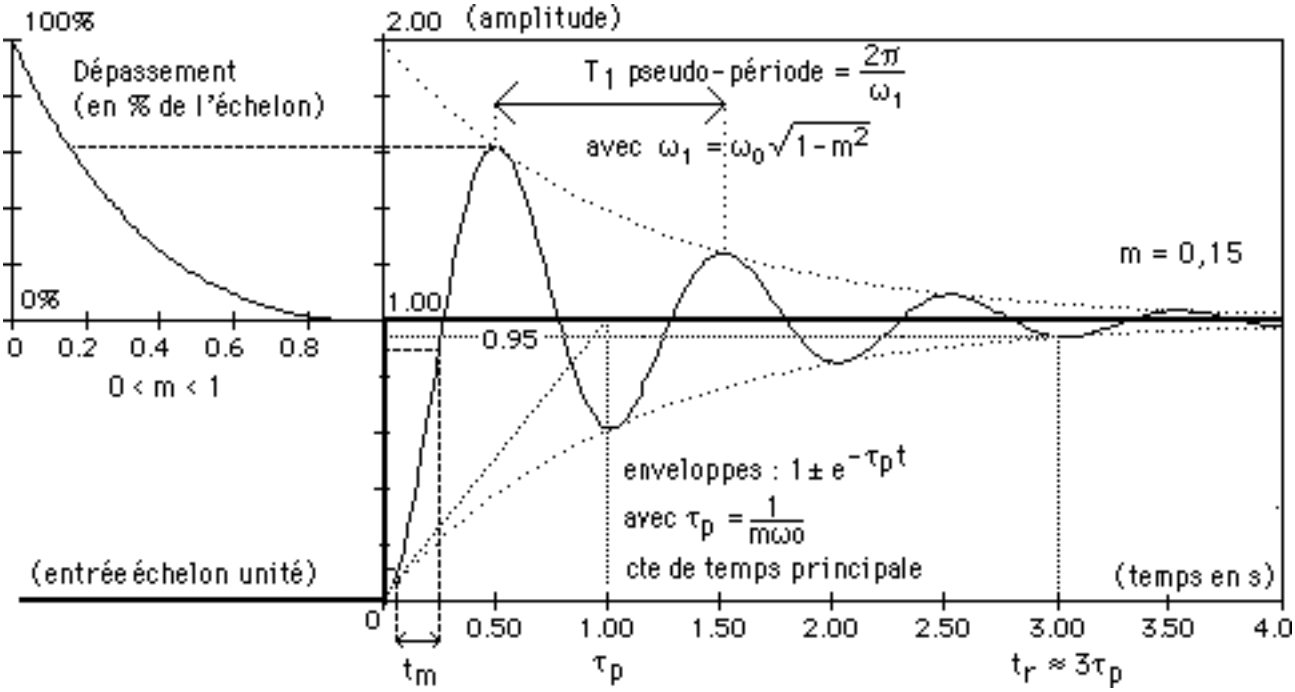
$$\Rightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + 2m\omega_0\frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 = \omega_0^2 u_e$$

Solution : cf cours de maths et de régulation !

(dans les exemples qui suivent, on prend : fo = $\omega_0/2\pi$ = 1Hz)

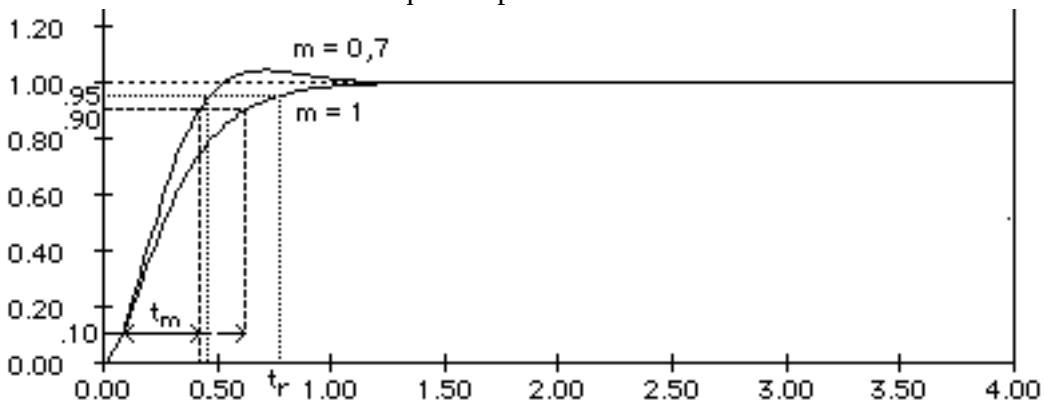
$m < 1$ Réponse oscillante d'amplitude exponentiellement décroissante.

Mesure de m par le dépassement : $D = e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} \Leftrightarrow m = -\frac{\ln D}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 D}}$

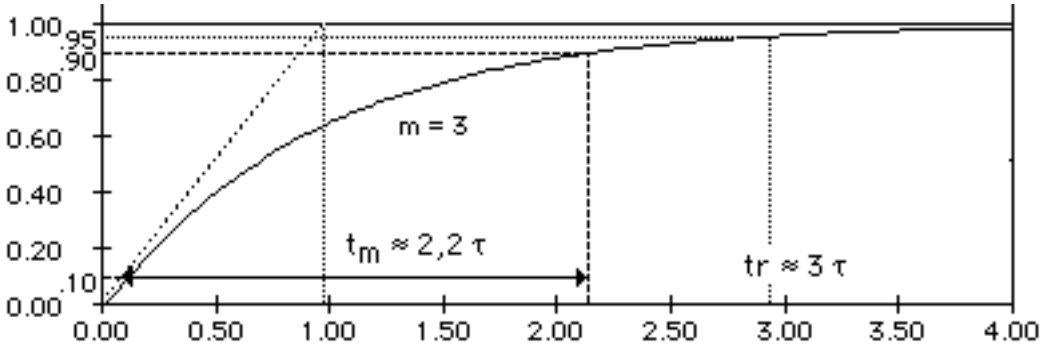


$m = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7$ Amortissement sous-critique. Dépassement peu important ≈ 4,3%.

$m = 1$ Amortissement critique. Dépassement nul.

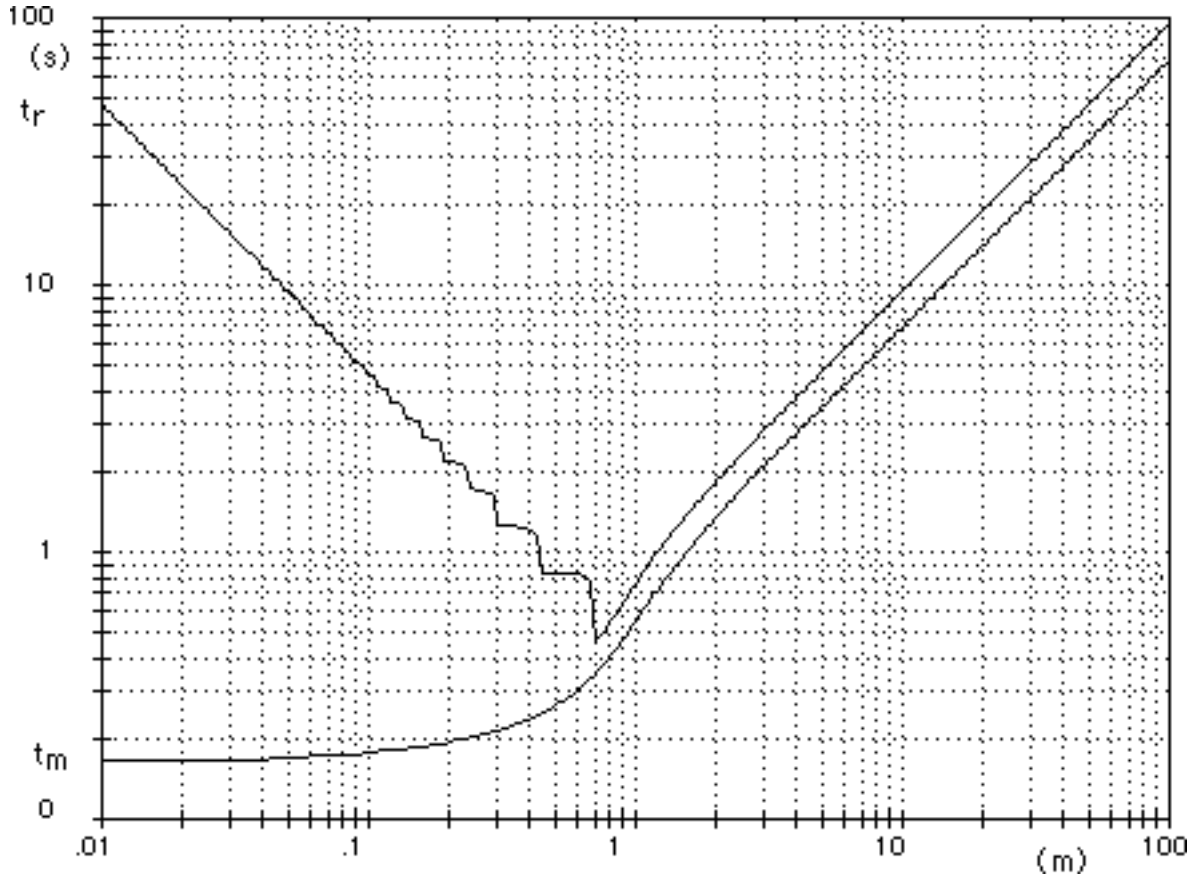


$m > 1$ Réponse amortie. Dans le cas où m est grand, réponse proche de celle d'un circuit du 1er ordre avec $\tau \approx 2m/\omega_0$.



- *Conclusion : compromis temps de réponse - temps de montée*

t_r : temps de réponse ; t_m : temps de montée. *Exemple avec* f_0 = 1 Hz.



Le temps de montée est la durée séparant l'instant où la grandeur de sortie est égale à 10% de sa valeur asymptotique et l'instant où elle est égale à 90% de cette valeur. Il correspond à la vitesse avec laquelle le système répond à la sollicitation d'entrée.

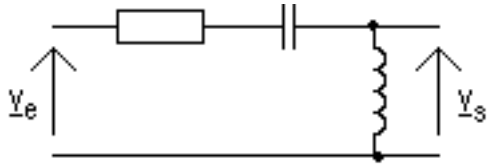
Le temps de réponse est le temps que met le système pour se stabiliser selon une précision donnée, ici ±5%, autour de sa valeur finale.

Ces courbes présentent le résultat du calcul (compliqué…) de t_r (courbe en "V") et de t_m. On constate qu'il existe un choix optimum, résultat du compromis entre un temps de montée et un temps de réponse qui soient le plus court possible, pour m = 0,7.

* **COMPLEMENTS** *

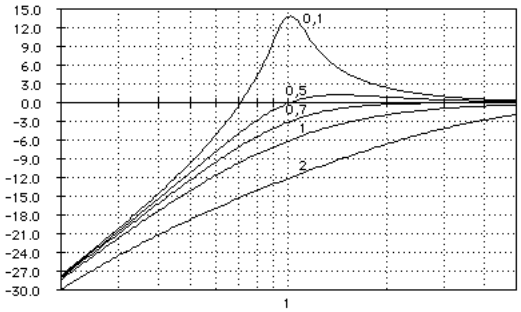
• *Autres filtres du 2ème ordre*

- Filtre passe-haut



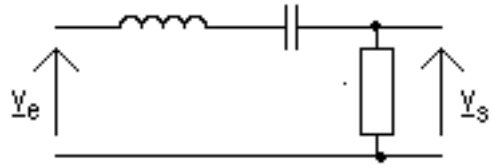
$$\underline{T} = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Circuit RLC, sortie sur L. Constantes identiques à la fonction de transfert principale. Asymptote à +12dB/octave.



Courbes de phases : décalées de π / fonction de transfert principale du second ordre.

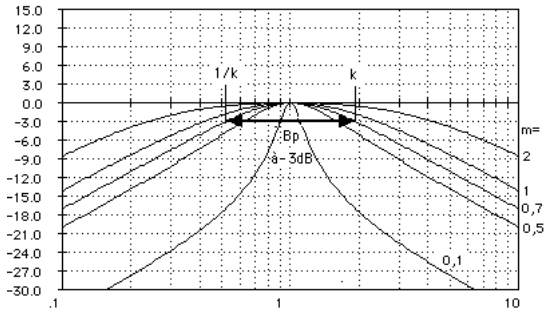
- Filtre passe-bande



$$\underline{T} = \frac{2jm\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Circuit RLC, sortie sur R. Constantes identiques à la fonction de transfert principale. Asymptotes en ±6dB/octave.

Courbes de phase décalées de +π/2 par rapport aux courbes de la fonction de transfert principale du second ordre.



Bande passante à -3dB :

Le gain $G = 20\log|\underline{T}|$ est représenté dans le plan de Bode par une courbe symétrique passant par $G = 0$dB pour $x = 1$. Les limites de la bande passante sont obtenues pour $G = -3$dB <=> $|\underline{T}| = 1/\sqrt{2}$

Il est graphiquement évident que les deux fréquences vérifiant cette relation sont, par raison de symétrie, de la forme : $f_1.f_2 = f_0^2$ puisque f_0 est la fréquence centrale et est donc au milieu du segment f_1-f_2 . D'où : $f_1 = f_0/k$ et $f_2 = kf_0$.

Si $f = kf_0$, $|\underline{T}| = \dfrac{2mk}{\sqrt{\left(1-k^2\right)^2 + 4m^2k^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1-k^2}{2mk}\right)^2 + 1}}$. Si $f = f_0/k$, $|\underline{T}| = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{k^2-1}{2mk}\right)^2 + 1}}$

Les limites de la bande passante sont donc définies par $|\underline{T}| = 1/\sqrt{2}$, c'est-à-dire par :

$$1-k^2 = \pm 2mk$$

On gardera la racine positive de cette équation (NB : $k_1 = 1/k_2$) :

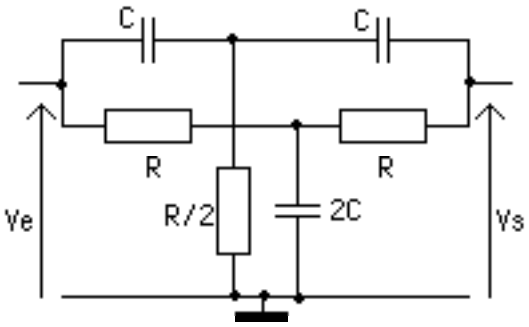
$$k_{1,2} = m \pm \sqrt{(m^2+1)}$$

La bande passante du filtre est par définition : $B_p = k_1 f_o - k_2 f_o$. D'où :

$$\mathbf{B_{p(Hz)} = 2mf_o}$$

Si m est faible (<0,1), cette relation s'applique aussi, de manière approchée, à la bande passante des filtres Passe-Bas et Passe-Haut. ***Plus m est faible, plus la bande passante est étroite, plus le filtre est "sélectif".***

- Filtre réjecteur (exemple : filtre en "double T"



Étude du filtre : on décompose le filtre en un double filtre en "T". On transforme chaque quadripôle en "T" en un quadripôle en "Π". Les formules de transformation (transformation Y-Δ cf § A12), appliquées successivement aux deux "T", donnent (avec $x = RC\omega = \omega/\omega_o$) :

$\sum \underline{Y}_i = 2/R + 2jC\omega$ $\qquad$ $\sum \underline{Y}'_i = 2/R+2jC\omega$

$\underline{Y}_{13} = jC\omega jx/2(1+jx)$ $\qquad$ $\underline{Y}'_{13} = 1/2R(1+jx)$

$\underline{Y}_{23} = \underline{Y}_{21} = jC\omega/(1+jx)$ $\qquad$ $\underline{Y}'_{23} = \underline{Y}'_{21} = jC\omega/(1+jx)$

Les deux quadripôles en π étant reliés en parallèle, les admittances des branches correspondantes s'ajoutent deux à deux :

$\underline{Y}''_{13} = \underline{Y}_{13} + \underline{Y}'_{13} = (1-x^2)/2R(1+jx)$

$\underline{Y}''_{23} = \underline{Y}''_{21} = \underline{Y}_{21} + \underline{Y}'_{21} = 4jx/2R(1+jx)$

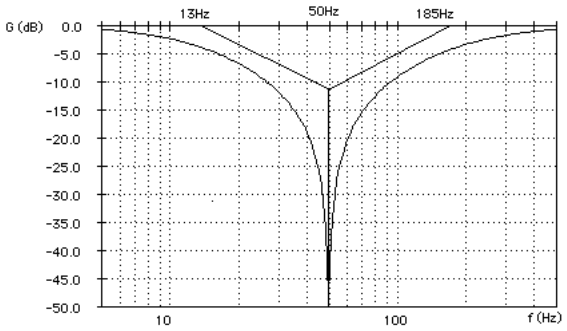
En appliquant la règle du pont diviseur de tension à la sortie du filtre (qui est à vide), il vient :

$\underline{T} = \underline{Y}''_{13}/(\underline{Y}''_{13}+\underline{Y}''_{23}) = (1-x^2)/(1+4jx-x^2)$

D'où :

$$\underline{T} = \frac{1+\left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_2}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \\ \omega_1 = \dfrac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)RC} \\ \omega_2 = \dfrac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)RC} \end{cases}$$

AN : f_o = 50 Hz, C = 0,47 µF , $R = 1/2\pi f_o C$ = 6800Ω ; $f_1 = 1/2\pi(2+\sqrt{3})RC$ = 13Hz ; $f_2 = 1/2\pi(2-\sqrt{3})RC$ = 185Hz. La courbe possède une asymptote verticale ($20\log|\underline{T}| \longrightarrow -\infty$) pour $f = f_o$.



• *Filtres passe-bas d'ordre supérieur : choix du type de réponse*

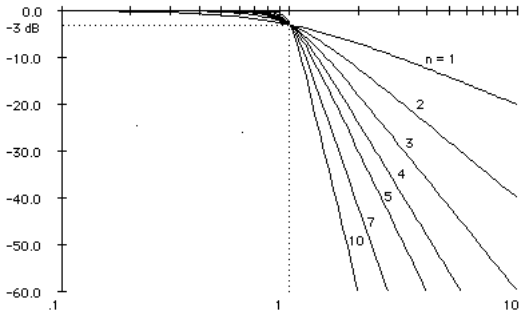
Une infinité de fonctions de transfert répondent au gabarit d'un filtre donné, puisque toute courbe de gain passant entre les limites définies (coupure et atténuation) convient. Il est possible de définir et calculer sur ordinateur (par approximations successives) n'importe quel type de réponse obéissant au gabarit. Cette solution est toutefois lourde à mettre en œuvre, et dépasse les besoins rencontrés dans la pratique courante, où l'on peut se restreindre à quelques types particuliers de réponse aux propriétés connues que l'on saura calculer relativement facilement. Nous en décrirons ici quelques unes, sans détailler les calculs et démonstrations qui conduisent aux résultats énoncés.

- *Réponse de Butterworth*

Ce type de réponse est défini à l'ordre n par une courbe de gain dont l'équation est la suivante, où $x = \omega/\omega_0 = f/f_0$; f_0 coupure à -3dB (G = -3 pour x = 1) :

$$G = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}\right)$$

La caractéristique essentielle de la courbe est d'être très plate dans la bande passante (proche de 0dB). Elle se rapproche d'autant plus de la courbe idéale (gabarit rectangulaire) que n est plus élevé. La fréquence de coupure est la même ∀ n.



Discussion :

-qualité en réponse impulsionnelle : quel que soit n, on montre que le dépassement en réponse impulsionnelle reste relativement faible :

ordre n	dépassement % (réponse à un échelon)
1	0
2	4
4	11
6	14
8	16

Ce type de réponse est donc bien adapté au filtrage de signaux à variations rapides (signaux échantillonnés par exemple).

-défaut en réponse harmonique : l'avantage précédent se paie par une coupure autour de f_0 de pente relativement faible (mais elle peut être augmentée avec n plus grand). Or c'est précisément autour de la fréquence de coupure que l'on a besoin en général d'un filtrage énergique !

Cas particuliers : on vérifie que :

n = 1 : la réponse de Butterworth d'ordre 1 n'est autre que la fonction bien connue du 1er ordre

n = 2 : la réponse de Butterworth d'ordre 2 est la fonction de transfert principale du second ordre avec m = $\sqrt{2}/2$.

On vérifie que : $1/|\underline{T}|^2 = \left[(1-x^2)^2 + 2x^2\right] = 1 + x^4$

- *Réponse de Chebycheff*

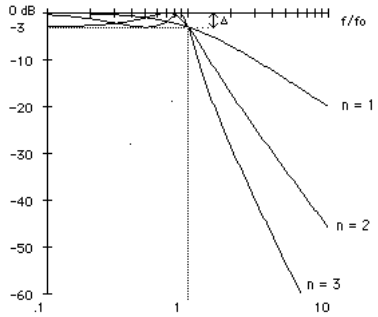
Cette réponse est définie par l'équation :

$$G = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 P_n^2(x)}}\right)$$

où le polynôme $P_n(x)$ s'obtient par la relation de récurrence : $P_{n+1} = 2P_n - P_{n-1}$, avec $P_0 = 1$ et $P_1 = x$. Il vient : $P_2 = 2x^2-1$; $P_3 = 4x^3-3x$; $P_4 = 8x^4-8x^2+1$; etc…

ε définit l'ondulation acceptée dans la bande passante : la réponse n'est plus parfaitement plate pour $x < 1$, mais on

s'autorise un écart par rapport au zéro dB. Cet écart vaut (en dB) : $\Delta_{dB} = -10\log(1+\varepsilon^2)$. On choisit en général $0,1 \leq \Delta \leq 3dB$.



Discussion :

-défaut en réponse impulsionnelle : le dépassement est nettement supérieur à Butterworth :

ordre *n*	dépassement % (Δ = 0,8dB)	dépassement % (Δ = 3dB)
1	0	0
2	11	21
4	18	28
6	21	32
8	23	34

-qualité en réponse harmonique : la pente de la courbe au voisinage de la fréquence de coupure est nettement plus franche que dans le cas Butterworth.

Ces réponses seront donc utilisées de préférence lorsqu'on a besoin d'un filtrage énergique au voisinage de la fréquence de coupure. Elles sont en revanche déconseillées dans le cas de signaux à variations rapides (dépassement élevé => déformation importante des signaux).

Cas particuliers :

$n = 1$: la réponse de Chebycheff d'ordre 1 n'est autre que la fonction du premier ordre. L'ondulation Δ, lorsque Δ = 3dB, correspond à l'atténuation à la fréquence de coupure.

$n = 2$: la réponse de Chebycheff d'ordre 2 est la fonction de transfert principale du second ordre avec $m < \sqrt{2}/2$. Par exemple, pour Δ = 3dB, soit $\varepsilon \approx 1$, on trouve $m \approx 0,38$.