B22 - Transformée en z

• *Théorème du retard en notation complexe*

Notations	signal analogique	signal échantillonné
représentation analytique	$v(t) = V.\sin(\omega t)$	$v(kT_e) = V.\sin(\omega k T_e)$
représentation complexe	$\underline{v}(t) = V.e^{j\omega t}$	$\underline{v}(kT_e) = V.e^{j\omega k T_e}$

$$\underline{v}[(k\text{-}1)T_e] = V.e^{j\omega(k-1)T_e} = V.e^{j\omega k T_e}.e^{-j\omega T_e} = \underline{v}(kT_e).e^{-j\omega T_e}$$

Théorème : *à un retard T_e correspond une multiplication par* $e^{-j\omega T_e}$, que l'on note z^{-1}

Soit : $z = e^{j\omega T_e}$ ou, en notation de Laplace, $e^{T_e p}$

• *Transformée en z d'un signal échantillonné*

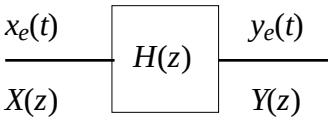
T. de Fourier d'un Dirac retardé : $\delta(t - kT_e) \xrightarrow{TF} e^{-j\omega k T_e} = z^{-k}$

T. F. d'un signal échantillonné (cf §B14) : $y_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(kT_e).\delta(t - kT_e)$

$$\xrightarrow{TF} Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(kT_e).z^{-k}$$

Définition de la transformée en z : $y_e(t) \xrightarrow{Z} Y(z)$

Application : $Y(z) = H(z).X(z)$



Connaissant la fonction de transfert en z d'un système numérique, on peut déterminer sa réponse à un signal d'entrée échantillonné quelconque par : $x_e(t) \to X(z) \to Y(z) \to y_e(t)$

• *Propriétés* (notation simplifiée : $y(kT_e) = y_k$)

- Linéarité : $\mathbf{Z}[y_1+y_2] = \mathbf{Z}[y_1] + \mathbf{Z}[y_2]$ et $\mathbf{Z}[ay_1] = a\mathbf{Z}[y_1]$
- Théorème du retard : $y_{k-n} \xrightarrow{Z} z^{-n}.Y(z)$
- Dérivation arrière : $y_k = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{T_e} \xrightarrow{Z} Y(z) = \dfrac{1 - z^{-1}}{T_e} X(z)$
- Intégration simple : $y_k = y_{k-1} + T_e x_k$

$$\xrightarrow{Z} Y(z) = z^{-1}Y(z) + T_e.X(z) \Leftrightarrow Y(z) = \frac{T_e}{1 - z^{-1}} X(z)$$

- Int., méthode des trapèzes : $y_k = y_{k-1} + T_e.\dfrac{x_k + x_{k-1}}{2} \xrightarrow{Z} Y(z) = \dfrac{T_e}{2}.\dfrac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}.X(z)$
- Th. de la valeur initiale : $\lim_{k\to 0} y_k = \lim_{z\to\infty} Y(z)$
- Th. de la valeur finale : $\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1}\left(1 - z^{-1}\right)Y(z)$
- Convolution (cf plus bas) : $x_k * y_k \underset{Z^{-1}}{\overset{Z}{\rightleftarrows}} X(z).Y(z)$

- ***Passage : $\underline{H}(j\omega)$ ou $H(p) \rightarrow H(z)$***

  - *Méthodes de calcul :*

    - lecture directe d'une table Transformées de Laplace → Transformées en z
    - méthode simplifiée : effectuer dans $H(p)$ les changements de variable suivants :

      . dérivée (multiplication par p) : $p \rightarrow \dfrac{1-z^{-1}}{T_e}$

      . intégrale (division par p) : $\dfrac{1}{p} \rightarrow \dfrac{T_e}{1-z^{-1}}$

      . retard pur : $e^{-\Delta t.p} \rightarrow z^{-\left[\frac{\Delta t}{T_e}\right]}$

    - méthode des trapèzes (plus précise) : $p \rightarrow \dfrac{2}{T_e}.\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

  - *Cas d'un procédé réel*

  Dans la pratique, non seulement le signal est échantillonné, mais il est aussi bloqué. Dans la fonction de transfert globale, il faut tenir compte de l'existence du " bloqueur d'ordre zéro " (BOZ). On sait (§B14) que la transmittance de celui-ci est : $B_0(p) = \dfrac{1-e^{-T_e p}}{p}$, d'où l'on tire la règle suivante, en notant H_B la transformée d'un système échantillonné ET bloqué, et **Z**[ ] la transformée en z lue dans la table ou calculée par changement de variable : $H_B(z) = \left(1-z^{-1}\right).\mathbf{Z}\left[\dfrac{H(p)}{p}\right]$

- ***Passage : $H(z) \rightarrow \underline{H}(j\omega)$ ou $H(p)$***

  Par changement de variable : $z \rightarrow e^{j\omega T_e} = \cos\omega T_e + j\sin\omega T_e$

- ***Passage : $H(z) \leftrightarrow$ équation de récurrence***

  F. transfert en z : $H(z) = \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + ...}{1 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + ...}$

$\leftrightarrow$ équ. aux différences : $Y(z) + B_1 z^{-1} Y(z) + B_2 z^{-2} Y(z) + ... = A_0 X(z) + A_1 z^{-1} X(z) + A_2 z^{-2} X(z) + ...$

$\leftrightarrow$ équation de récurrence : $y_k = -B_1 y_{k-1} - B_2 y_{k-2} - ... + A_0 x_k + A_1 x_{k-1} + A_2 x_{k-2} + ...$

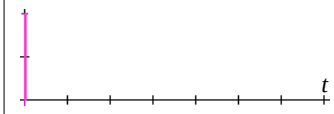
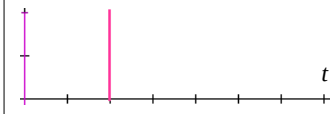
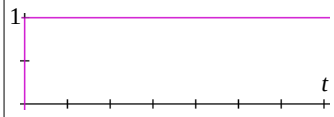
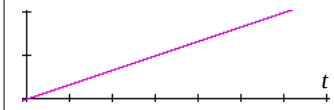
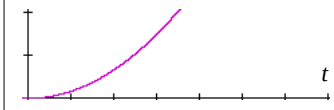
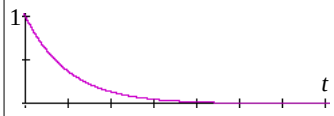
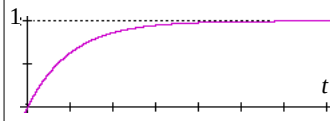
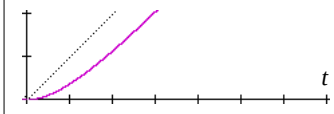
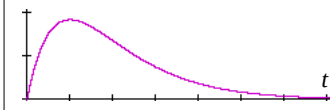
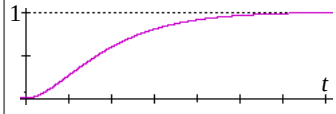
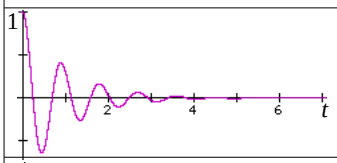
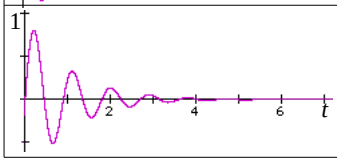
- ***Passage : équation de récurrence $\rightarrow y_k$***

  Immédiat, en calculant pas à pas la suite $\{y_k\}$ à partir de la connaissance :
  - de l'équation de récurrence
  - de la suite $\{x_k\}$ des échantillons d'entrée
  - de la ou des conditions initiales y_0, y_1, ...

- ***Passage : $H(z) \rightarrow h_k$*** *(réponse impulsionnelle discrète du système)*

  - Par division de polynôme : $H(z) = \dfrac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + ...$
  - Par transformée en z inverse (lire dans une table)
  - Par convolution (voir compléments).

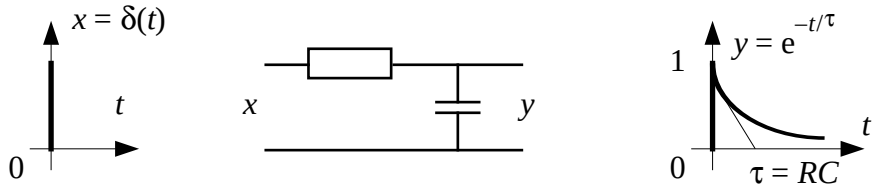
- ***Passage : $h_k \rightarrow H(z)$*** : par transformée de Fourier discrète (exemple : méthode utilisée ci-dessus dans le § Transformée en z d'un signal échantillonné)

signal causal	$x(t)$ [x=0 pour t<0]	$X(p)$	$X(z)$ [avec $\alpha = e^{-aT_e}$]
	$\delta(t)$	1	1
	$\delta(t-kT_e)$	$e^{-kT_e p}$	z^{-k}
	$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$
	t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{T_e.z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$
	t^2	$\frac{2}{p^3}$	$\frac{T_e^2.z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^3}$
	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1}{1-\alpha.z^{-1}}$
	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{(1-\alpha)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\alpha z^{-1}\right)}$
	$at-1+e^{-at}$	$\frac{a^2}{p^2(p+a)}$	$\frac{aT_e z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}-\frac{(1-\alpha)z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\alpha z^{-1}\right)}$
	$t.e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{T_e\alpha z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)^2}$
	$1-(1+at)e^{-at}$	$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$	$\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}-\frac{aT_e\alpha z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)^2}$
	$e^{-at}.\cos(bt)$ cas particulier : $a = 0$ (sinusoïde pure)	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{z^{-1}\left(1-\alpha.\cos(bT_e).z^{-1}\right)}{1-2\alpha.\cos(bT_e).z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$
	$e^{-at}.\sin(bt)$ cas particulier : $a = 0$ (sinusoïde pure)	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$	$\frac{\alpha.\sin(bT_e).z^{-1}}{1-2\alpha.\cos(bT_e).z^{-1}+\alpha^2 z^{-2}}$

********** COMPLEMENTS : Convolution **********

• *Réponse impulsionnelle d'un système linéaire discret à un signal échantillonné*

Rappel : la réponse impulsionnelle d'un système est sa réponse à une impulsion de Dirac. Exemple :



On suppose que le système est linéaire, et on note $h(t)$ sa réponse impulsionnelle :
- à une impulsion $\delta(t)$, le système répond par $h(t)$, par définition.
- à une impulsion $\delta(t - lTe)$, le système répond par $h(t - lTe)$ (par décalage de l'axe des temps de l périodes T_e)
- à une impulsion $x(lTe).\delta(t - lTe)$, le système répond par $x(lTe).h(t - lTe)$, car le système est linéaire (multiplication par une constante).
- à une somme d'impulsions $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l.T_e).\delta(t - l.T_e)$, le système répond par $y(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l.T_e).h(t - l.T_e)$, car le système est linéaire (sommation sur un ensemble de valeurs élémentaires). $y(t)$ est la réponse du système à l'entrée $x(t)$.
- aux instants définis par échantillonnage $t = kT_e$, le signal de sortie vaut : $y(k.T_e) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l.T_e).h(k.T_e - l.T_e)$
- soit plus simplement : $y_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_l.h_{k-l}$ qui est l'opération de convolution numérique. On écrit : $y = h * x$.

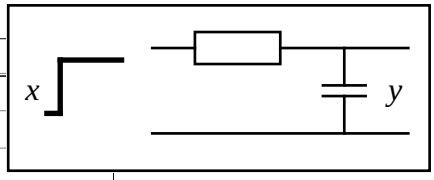
La suite numérique $\{h_l\}$ est appelée *réponse impulsionnelle discrète* du système échantillonné.

NB1 : pour des signaux causaux (c'est-à-dire nuls pour t < 0), la sommation s'étend de zéro à + l'infini.

NB2 : le produit de convolution est commutatif. Par exemple, y_k est aussi égal à $\sum_{l=0}^{+\infty} h_l.x_{k-l}$.

NB3 : l'impulsion de Dirac $\delta(t)$ est l'élément neutre de cet opérateur : $y(t) * \delta(t) \equiv y(t)$

Exemple : réponse d'un circuit RC à un échelon



k	x	y	h	tau	calculs
0	1	1,000	1,000	3	y1 = h1*x1
1	1	1,717	0,717		y2=h1*x2+h2*x1
2	1	2,230	0,513		y2=h1*x3+h2*x2+h3*x1
3	1	2,598	0,368		y3=h1*x4+h2*x3+h3*x2+h4*x1
4	1	2,861	0,264		y4=h1*x5+h2*x4+h3*x3+h4*x2+h5*x1
5	1	3,050	0,189		y5=h1*x6+h2*x5+h3*x4+h4*x3+h5*x2+h6*x1
6	1	3,186	0,135		y6=etc...
7	1	3,283	0,097		
8	1	3,283	0,069		
9	1	3,283	0,050		
10	1	3,283	0,036		
11	1	3,283	0,026		
12	1	3,283	0,018		
13	1	3,283	0,013		
14	1	3,283	0,009		
15	1	3,283	0,007		
16	1	3,283	0,005		
17	1	3,283	0,003		
18	1	3,283	0,002		
19	1	3,283	0,002